EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Determine el rango y el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x+5}}$$

Para determinar el dominio de esta función, se verifica los valores que puede tomar la variable independiente x. Primero se verifica los valores que puede tomar en la raíz, para esto se verifica que la expresión dentro de la raíz solo tome valores positivos sin incluir el cero, ya que se encuentra en el denominador de una división:

$$x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad Dominio: x > -5$$

Para hallar el rango se observa que con el dominio hallado, la función solo podrá tomar valores positivos, ya que siempre la raíz será positiva.

$$Rango: \;\; y > 0$$

2. Un tramo de alambre de $15\ cm$ de largo se corta en dos piezas. Una de longitud x se dobla para obtener un cuadrado, y la otra se dobla para obtener un triángulo equilátero. Expresar el área total encerrada por estas dos figuras en función de la longitud x.

Expresar modelo en palabras: en este caso la idea es encontrar el área del cuadrado y sumarla al área del triángulo.

$$A\ cuadrado = l^2 \quad A\ triangulo = \frac{bh}{2}$$

Elija la variable: como se debe hacer en función de x, se tiene:

$$l = \frac{x}{4} \;\;,\;\; b = \frac{15-x}{3} \;\;, para\ h\ se\ tiene:$$

$$h = \sqrt{\frac{(15-x)^2}{9} - \frac{(15-x)^2}{36}} = \sqrt{3}\,\frac{(15-x)}{6} \quad (Pitágoras)$$

Establecer el modelo: el modelo es la suma de las dos áreas, por lo que se tiene:

$$f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{15-x}{3}\right)\left(\sqrt{3}\,\frac{(15-x)}{6}\right) = \frac{x^2}{16} + \sqrt{3}\,\frac{(15-x)^2}{36}$$

3. Determinar si la siguiente función es par, impar o ninguna de ellas:

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Primero se debe hallar $f(-x)$, en este caso se tiene:

$$f(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \frac{1 - (-1)^2(x)^2}{1 + (-1)^2(x)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Como $f(-x) = f(x)$, la función es par.

4. Determinar si la siguiente función es par, impar o ninguna de ellas:

$$f(x) = x^7 - x^5 + x$$

Primero se debe hallar $f(-x)$, en este caso se tiene:

$$f(-x) = (-x)^7 - (-x)^5 + (-x) = -x^7 + x^5 - x = -(x^7 - x^5 + x)$$

Como $f(-x) = -f(x)$, la función es impar.

5. Determinar $f + g$ y fg:

$$f(x) = x^3 - 2x \qquad , \qquad g(x) = 7x^2 + 8x$$

Suma de funciones, suma de términos semejantes:

$$f + g = f(x) + g(x) = x^3 - 2x + 7x^2 + 8x = x^3 + 7x^2 + 6x$$

Producto de funciones, propiedad distributiva:

$$fg = f(x)g(x) = (x^3 - 2x)(7x^2 + 8x) = 7x^5 + 8x^4 - 14x^3 - 16x^2$$

6. Determinar $f - g$ y $\frac{f}{g}$

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad , \qquad g(x) = x^2 - 9$$

Resta de funciones, resta de términos semejantes:

$$f - g = f(x) - g(x) = x^2 + 3x - (x^2 - 9) = 3x - 9$$

Cociente de funciones, factorización y simplificación:

$$\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x-3} \quad para\ x \neq -3$$

7. Determinar fog

$$f(x) = 5x^2 + x \qquad , \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

Composición de funciones:

$$fog = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2-9}\right) = 5\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2 + \sqrt{x^2-9} = 5(x^2-9) + \sqrt{x^2-9}$$

Resultado final:

$$fog = (5x^2 - 45) + \sqrt{x^2-9}$$

8. Hallar la inversa de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$$

Primero se debe verificar si la función es **inyectiva (Uno a uno).** Para esto se debe demostrar que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.

$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1+3x}{5-2x} = \frac{1+3y}{5-2y} \quad \Rightarrow \quad (1+3x)(5-2y) = (5-2x)(1+3y)$$

$$\Rightarrow \quad 5 - 2y + 15x - 6xy = 5 - 2x + 15y - 6xy \quad \Rightarrow \quad 15x + 2x = 15y + 2y$$

$$\Rightarrow \quad 17x = 17y \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Como ya se demostró, $f(x)$ es inyectiva, por lo cual es invertible. Para hallar la inversa se expresa la variable independiente en función de la dependiente:

$$y = \frac{1+3x}{5-2x} \quad \Rightarrow \quad y(5-2x) = 1 + 3x \quad \Rightarrow 5y - 2xy = 1 + 3x$$

$$\Rightarrow \quad 5y - 1 = x(3+2y) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5y-1}{3+2y}$$

Entonces la inversa es: $f^{-1}(x) = \frac{5x-1}{3+2x}$

9. Determinar si la función $g(x)$ es la inversa o no de $f(x)$

$$f(x) = x^3 + 1 \quad , \quad g(x) = (x-1)^{1/3}$$

Para determinar si una función es inversa de otra, se debe realizar la composición entre ellas y verificar que se cumpla la siguiente condición: $f(g(x)) = x$

$$f(g(x)) = f\left((x-1)^{1/3}\right) = \left[(x-1)^{1/3}\right]^3 + 1 = (x-1) + 1 = x$$

Debido a que se comprobó la condición, entonces la función $g(x)$ efectivamente es la **inversa** de la función $f(x)$.

10. La siguiente función modela el crecimiento de una población de bacterias en un cultivo, en donde t está medida en horas:

$$f(t) = 350e^{0.8t}$$

Se desea saber, ¿En cuánto tiempo se alcanzará una población total de 7000 bacterias?

Para determinar el tiempo que se demora, se debe solucionar la siguiente ecuación:

$7000 = 350e^{0.8t}$: Ecuación a resolver

$20 = e^{0.8t}$: División entre igualdades

$\ln(20) = \ln(e^{0.8t})$: Aplicar logaritmo natural en ambos lados

$2.9957 = 0.8t$: Resultado del logaritmo natural

$t = \frac{2.9957}{0.8} = 3.7446\ horas$: Resultado final

11. Resolver la siguiente ecuación:

$$\log x + \log(x-1) = \log(4x)$$

$\log x + \log(x-1) = \log(4x)$: Ecuación a resolver

$\log x(x-1) = \log(4x)$: Propiedades de logaritmos

$10^{\log(x^2-x)} = 10^{\log(4x)}$: Aplicar función exponencial en base 10

$x^2 - x = 4x$: Resultado de la exponencial.

$x(x-5) = 0$: Simplificación y factorización

$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 5$: Solución ecuación cuadrática

Se puede observar que x no puede tomar el valor de cero, ya que la función logaritmo no está definida para $x = 0$, entonces se quita de las respuestas y la respuesta final es $x = 5$.