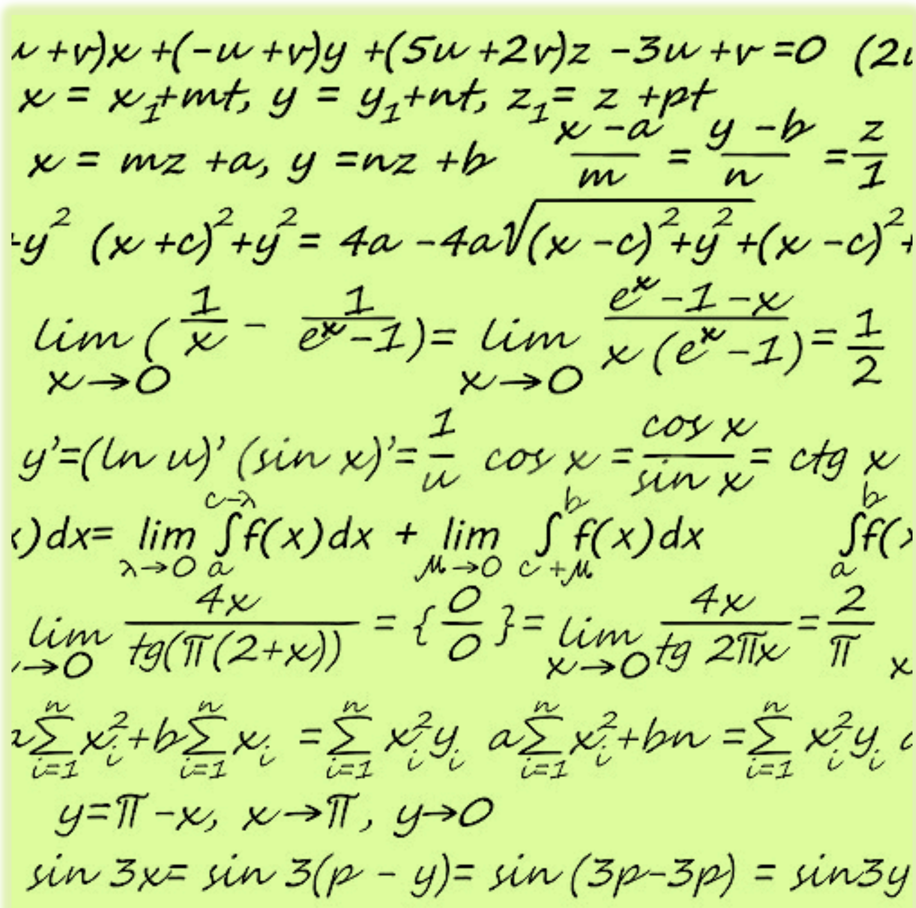
UNIDAD 4. FUNCIONES DE VARIABLE REAL



La función permite expresar la dependencia entre dos magnitudes. El concepto se usa desde el siglo XVII y en la actualidad cobra importancia en áreas como la ingeniería.

Tabla de contenido

UNIDAD 4. FUNCIONES DE VARIABLE REAL ... **1**
- **Tabla de contenido** ... **2**
- **Introducción** ... **3**
- **Objetivos** ... **3**
  - Objetivo general ... 3
  - Objetivos específicos ... 3
- **4.1 Funciones, dominio, rango y gráficas** ... **4**
  - 4.11 Función ... 4
  - 4.1.2 Dominio ... 4
  - 4.1.3 Rango ... 4
  - 4.1.4 Gráfica de una función ... 5
- **4.2 Tipo de funciones** ... **6**
  - 4.2.1 Función polinomial ... 6
  - 4.2.2 Función raíz ... 7
  - 4.2.3 Función racional ... 7
  - 4.2.4 Función a trozos ... 8
  - 4.2.5 Función parte entera ... 8
  - 4.2.6 Función valor absoluto ... 9
  - 4.2.7 Función signo (x) ... 9
- **4.3 Transformación de funciones** ... **10**
  - 4.3.1 Traslaciones ... 10
  - 4.3.2 Reflexiones ... 11
  - 4.3.3 Contracciones y dilataciones ... 12
  - 4.3.4 Valor absoluto ... 13
- **4.4. Modelado con funciones** ... **14**
- **4.5. Funciones pares e impares** ... **16**
  - 4.5.1 Función par ... 16
  - 4.5.2 Función impar ... 17
- **4.6. Álgebra de funciones** ... **18**
- **4.7. Composición de funciones** ... **19**
- **4.8 Función inyectiva e inversa** ... **20**
  - 4.8.1 Función inyectiva ... 20
  - 4.8.2 Función inversa ... 21
- **4.9 Función exponencial y logarítmica** ... **22**
  - 4.9.1 Función exponencial ... 22
  - 4.9.2 Función logarítmica ... 23
- **4.10 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas** ... **24**
  - 4.10.1 Función exponencial ... 24
  - 4.10.2 Función logarítmica ... 25
- **Resumen** ... **26**
- **Bibliografía** ... **27**
  - Referencias web ... 27

Introducción

En el mundo de las matemáticas el concepto de función, que es la relación entre dos cantidades o magnitudes dependientes entre sí y que cumplen unas relaciones concretas, es uno de los más importantes por su marcada incidencia en la vida diaria y por ende en la ingeniería; por ello, su estudio, modelamiento y aplicabilidad deben ser tratados en la materia.

Saber dibujar una función para su análisis es de vital importancia, al igual que sus transformaciones y su álgebra.

Por lo anterior, se tratará el uso de la función, sus transformaciones, al igual que se interpretarán las funciones exponencial y logarítmica.

Objetivos

Objetivo general

Manejar y aplicar las diferentes funciones y sus inversas, desarrollando ejercicios propuestos por el docente.

Objetivos específicos

- Distinguir y dibujar los diferentes tipos de funciones y sus transformaciones.
- Modelar distintas situaciones mediante una función.
- Graficar e interpretar las funciones exponencial y logarítmica; resolver ecuaciones del mismo tipo.

4.1 Funciones, dominio, rango y gráficas

4.11 Función

Una función f es una relación entre dos conjuntos A y B. Al conjunto A se le asigna un elemento x y para el conjunto B un elemento llamado f(x). Aquel elemento x se denomina **variable independiente** y el elemento llamado f(x) se denomina **variable dependiente.**

Otra definición sería: una función es una igualdad entre una cantidad que depende de otra cantidad tal como la ecuación de una recta: $y = mx + b$, donde y es la variable dependiente y x la variable independiente.

4.1.2 Dominio

El dominio de una función es el valor que puede tomar la variable independiente para que el valor de la dependiente sea real.

4.1.3 Rango

Se trata del valor que puede tomar la variable dependiente; es decir el resultado f(x) de la función, para dicho dominio.

Ejemplo

Hallar el domino y el rango para la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{3x} + 2$$

Para hallar el dominio, se deben evaluar todos los valores que puede tomar la variable independiente. En este caso, se observa que una raíz negativa no tiene sentido en los reales y por ende x no puede tomar ningún valor negativo. Entonces, el dominio para $f(x)$ son todos los $x \geq 0$.

Para hallar el rango, se debe determinar qué valores pueden tomar la función con el dominio definido. En este caso, la raíz puede solo puede tomar valores positivos, desde cero en adelante, pero al sumarle dos el rango se ve afectado y éste estaría definido de la siguiente manera: son todos los valores reales mayores o iguales que 2; o sea: $y \geq 2$.

4.1.4 Gráfica de una función

Es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $y = f(x)$. En pocas palabras, la gráfica de una función es la que corresponde a la ecuación $y = f(x)$.

Para graficar cualquier función se sigue los mismos pasos que para graficar una ecuación. Se hace una tabla con los valores de x y con éstos se hallan los de y y se procede a unir estos puntos en el plano cartesiano con una curva.

Ejemplo

Graficar la siguiente función:

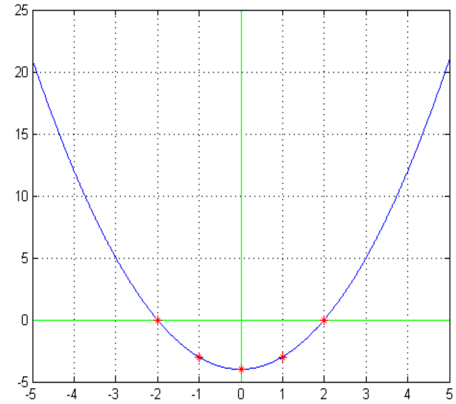
$$f(x) = x^2 - 4$$

En este caso, se debe graficar la ecuación $y = x^2 - 4$. Para esto, se realiza la tabla con los valores que puede tomar y para ciertos valores de x, como se puede apreciar en la siguiente tabla:

X	Y
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0

Tabla 4.1. Ejemplo de tabulación.

Con estos datos se puede graficar la función, dando como resultado la siguiente gráfica:

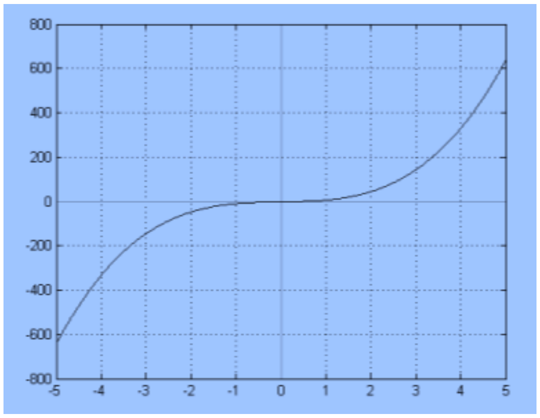


Gráfica 4.1 Punto y distancia.

4.2 Tipo de funciones

Las funciones se clasifican según su aplicación. Entre las más empleadas se encuentran:

4.2.1 Función polinomial

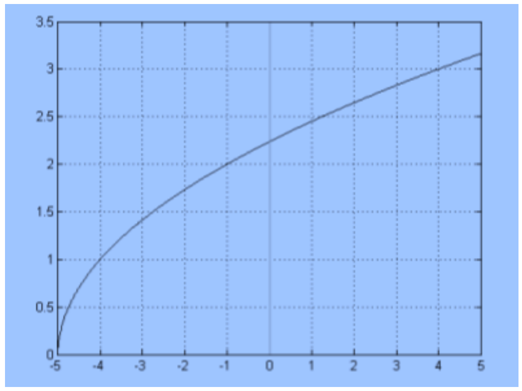


Gráfica 4.2 Gráfica de función polinomial.

Son aquellas funciones en donde su variable independiente es de grado uno o más. Se llaman así ya que están compuestas por un polinomio de orden n, donde n es un número entero. Un ejemplo de una función Polinomial es:

$$f(x) = 5x^3 + 3x - 2$$

4.2.2 Función raíz

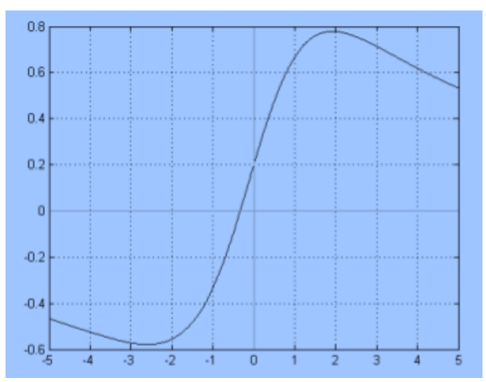


Gráfica 4.3. Gráfica de función raíz.

Son aquellas funciones en donde su variable independiente está dentro de una raíz o tiene un exponente fraccionario. Un ejemplo de una función raíz es:

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

4.2.3 Función racional

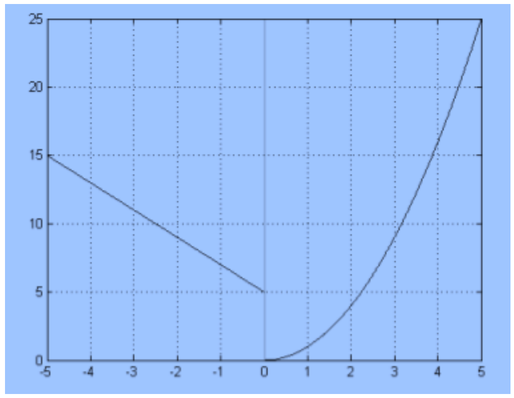


Gráfica 4.4 Gráfica de función racional.

Son aquellas funciones en donde se encuentra una razón entre dos funciones Polinomiales; es decir, hay una fracción, en donde tanto el numerador como el denominador son funciones Polinomiales. Un ejemplo de una función racional es:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+5}$$

4.2.4 Función a trozos

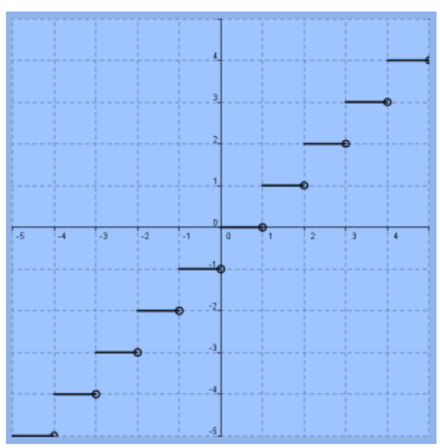


Gráfica 4.5 Gráfica de función a trozos.

Son aquellas funciones que dividen su dominio en conjuntos, en donde a cada conjunto le corresponde una función diferente. Un ejemplo de una función a trozos es:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 5 - 2x \quad para\; x < 0 \\ x^2 \quad para\; x \geq 0 \end{Bmatrix}$$

4.2.5 Función parte entera

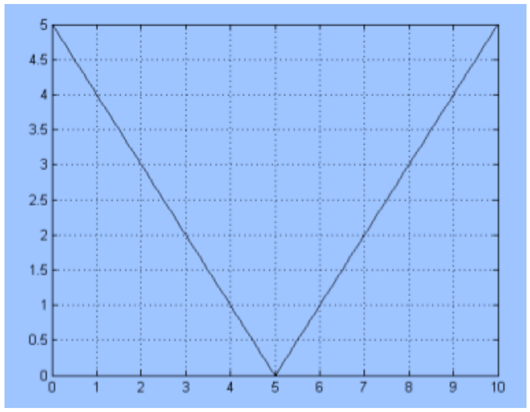


Gráfica 4.6 Gráfica de función parte entera.

Es una función que 'elimina' la parte decimal al dominio para así dejar solo su parte entera. Esta función tiene como rango todos los números enteros. Un ejemplo de una función parte entera es:

$$f(x) = [x]$$

4.2.6 Función valor absoluto

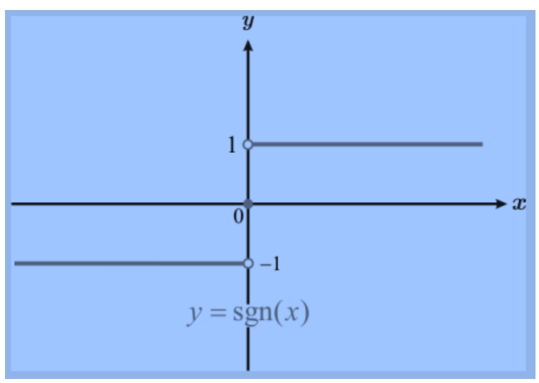


Gráfica 4.7 Gráfica de función valor absoluto.

Es una función a trozos, que se define como la distancia de un número *x,* al cero de la recta real. En otras palabras es el valor numérico de *x* sin tener en cuenta su signo. Un ejemplo de una función valor absoluto es:

$$f(x) = |x - 5|$$

4.2.7 Función signo (x)



Gráfica 4.8 Gráfica de función signo (x).

Es una función a trozos, que se define como el signo de un número *x;* es decir, si el número es negativo la función toma un valor de -1, si es positivo 1 y si es igual a cero la función toma un valor de cero. Un ejemplo de una función signo (x) es:

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & para\ x > 0 \\ 0 & para\ x = 0 \\ -1 & para\ x < 0 \end{cases}$$

4.3 Transformación de funciones

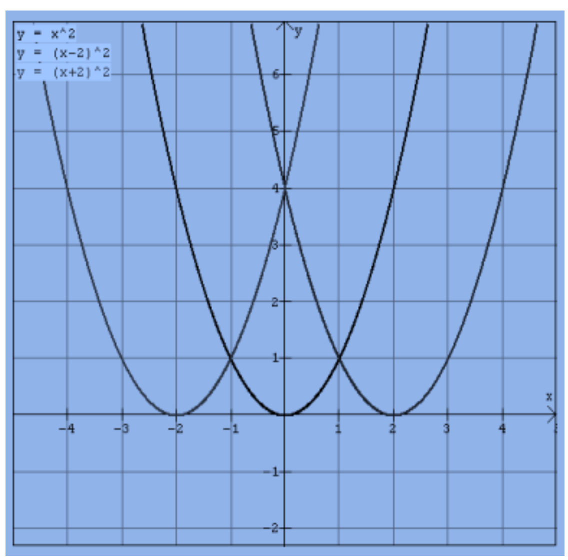
Basándose en funciones ampliamente conocidas, existe la posibilidad de hallar las ecuaciones y gráficas de otras muy parecidas, con el solo hecho de trasladar, reflejar, contraer, dilatar o aplicar valor absoluto a estas funciones.

En cada uno de los casos anteriores se aplican las transformaciones requeridas, para obtener así la ecuación y la gráfica de una manera muy sencilla.

4.3.1 Traslaciones

Traslación horizontal: la función se mueve **a lo largo del eje x**. Si se tiene una función $y = f(x)$, una traslación horizontal sucede cuando a la variable independiente se le suma valor real; es decir, cuando sucede $y = f(x + a)$; donde a es un real y además es constante; entonces:

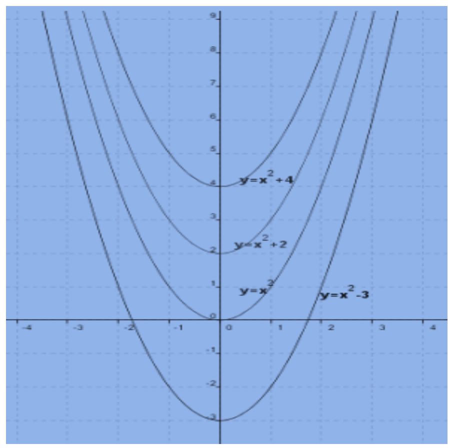
a) Si $a > 0$; la traslación se hará hacia la izquierda en el eje x.
b) Si $a < 0$; la traslación se hará hacia la derecha en el eje x.



Gráfica 4.9 Traslación horizontal.

Traslación vertical: la función se mueve **a lo largo del eje y**. Si se tiene una función $y = f(x)$, una traslación vertical sucede cuando a la variable dependiente se le suma un valor real; es decir, cuando sucede $y = f(x) + a$; donde a es un real y además es constante; entonces:

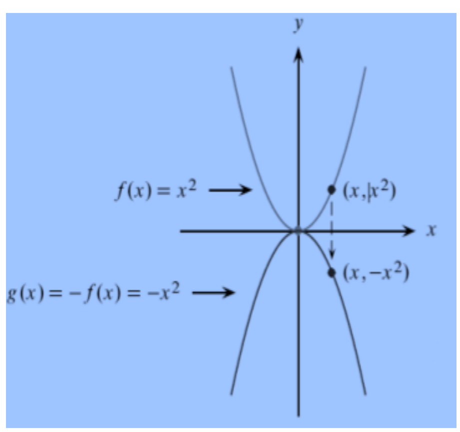
a) Si $a > 0$; la traslación se hará hacia arriba en el eje y.
b) Si $a < 0$; la traslación se hará hacia abajo en el eje y.



Gráfica 4.10 Traslación vertical.

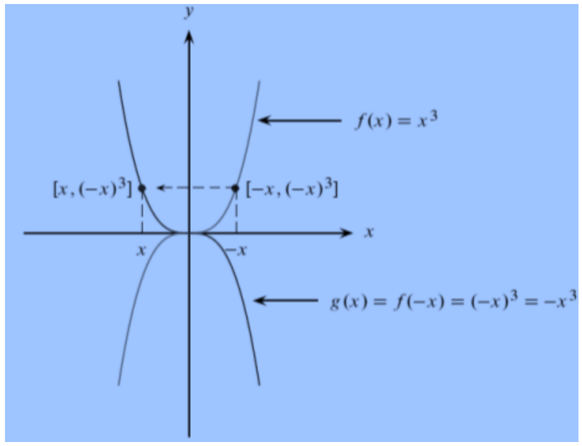
4.3.2 Reflexiones

Reflexión en el eje X: la función se refleja alrededor del eje x (eje horizontal). Si se tiene una función $y = f(x)$, una reflexión en el eje X sucede cuando toda la función se multiplica por -1, es decir se tiene $y = -f(x)$.



Gráfica 4.11 Reflexión en eje X.

Reflexión en el eje Y: la función se refleja alrededor del eje y (eje vertical). Si se tiene una función $y = f(x)$, una reflexión en el eje Y sucede cuando toda la variable independiente se multiplica por -1, es decir se tiene $y = f(-x)$.

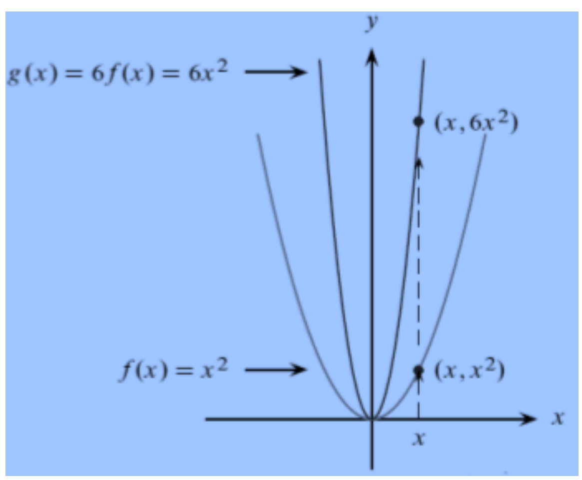


Gráfica 4.12 Reflexión en eje X.

4.3.3 Contracciones y dilataciones

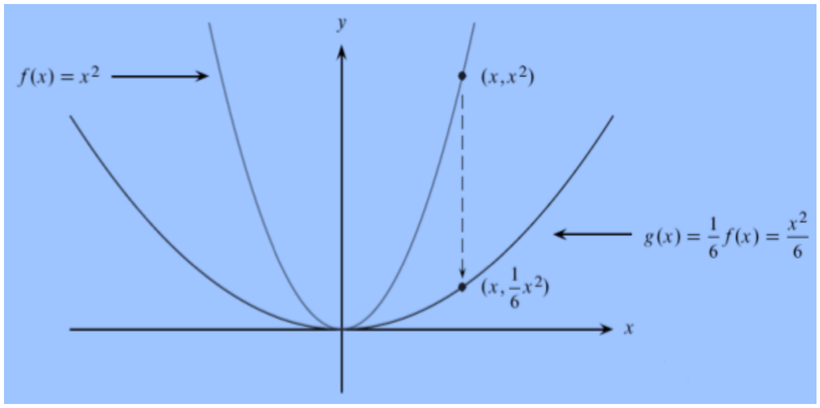
Si se tiene una función $y = f(x)$, una dilatación o contracción se da cuando se multiplica un número positivo a la función, es decir se tiene $y = af(x)$, donde a es un número positivo. Entonces se puede tener:

a) Si $a > 1$ la función se contrae hacia el eje y:



Gráfica 4.13 Contracción hacia el eje Y.

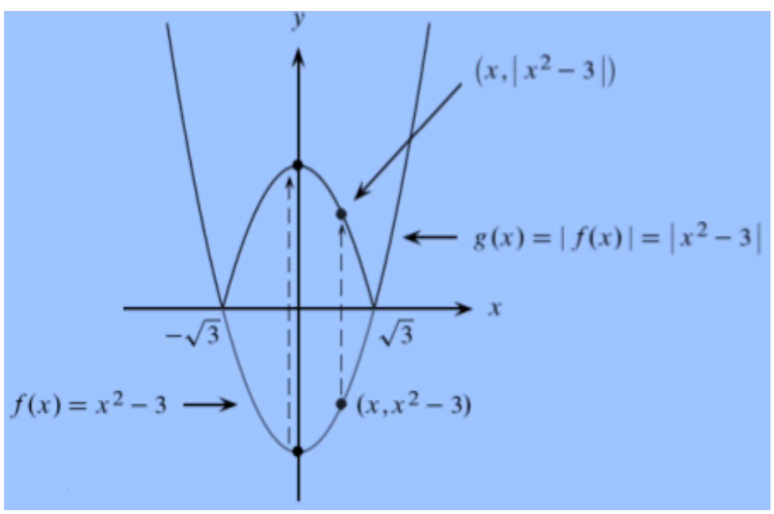
b) Si $0 < a < 1$ la función se dilata hacia afuera del eje y:



Gráfica 4.14 Dilatación sobre el eje Y.

4.3.4 Valor absoluto

Todos los valores negativos que pueda tener una función cualquiera, se reflejan alrededor del eje X; es decir, se vuelven positivos. De esta manera se afecta una función con valor absoluto.



Gráfica 4.15 Transformación con valor absoluto[1].

.

[1] Algunas de las gráficas que se muestran en esta unidad han sido tomadas de mathematicasfuncions.blogspot.com.

4.4. Modelado con funciones

Desde sistemas sencillos, como el movimiento en línea recta de cualquier objeto (despreciando su masa) con una velocidad constante, hasta complejos, como la representación de la campana de Gauss en probabilidad, las funciones se han usado para modelar fenómenos constantes tanto físicos como matemáticos.

Así se logra tener un mejor entendimiento de estos fenómenos y se pueden elaborar modelos matemáticos que resultan ser más fáciles de abordar que los modelos netamente experimentales.

La siguiente es la metodología usada para modelar con funciones cualquier tipo de problema:

- **Exprese el modelo en palabras:** identificar exactamente qué cantidad se quiere modelar y expresarla en función de otras cantidades que permitan establecer la relación entre ellas.

- **Elija la variable:** escoger las variables que van a ser utilizadas para representar la función del primer paso. A una de ellas darle el nombre de x y las demás representarlas en función de ella.

- **Establezca el modelo:** expresar la función descrita en el primer paso en lenguaje algebraico, como una función de una única variable que será x.

- **Use el modelo:** se emplea la función encontrada en el tercer paso, para resolver problemas respecto al fenómeno modelado o para comprender mejor el funcionamiento del fenómeno.

Ejemplo

Modelar el volumen de una caja, en donde su ancho es el doble de su altura y la profundidad es cuatro veces su altura. Hallar el volumen de la caja si la altura es de 3 cm.

Al aplicar cada uno de los pasos anteriormente descritos se tiene:

- **Expresar modelo en palabras:** en este caso la idea es encontrar el volumen de un prisma, que está definido como altura x ancho x profundidad.

- **Elija la variable:** la variable a representar será la altura, ya que según el problema las demás están en función de esta de la siguiente manera:

$$x = Altura \quad 2x = ancho \quad 4x = profundidad$$

- **Establezca el modelo:** ya se tienen representadas las cantidades que influyen en el problema, por lo que el modelo es:

$$f(x) = x(2x)(4x) = 8x^3$$

- **Use el modelo:** se pide hallar el volumen, si la altura es de 3 cm, entonces para hallarlo se usa la función encontrada de la siguiente manera:

$$f(3\ cm) = 8(3\ cm)^3 = 72\ cm^3$$

Ejemplo

Modelar la cantidad de alambre que se necesita para cercar un campo cuadrado. ¿Qué cantidad de alambré es necesario, si se tiene que un lado del campo mide 10 m?

Al aplicar la metodología dada, se tiene:

- **Expresar modelo en palabras:** en este caso la idea es encontrar el perímetro del campo cuadrado, para esto se deben sumar todos sus lados que son iguales.

- **Elija la variable:** la variable a representar será la longitud de un lado, ya que según el problema el campo es cuadrado, por lo que todos sus lados son iguales:

$$x = Lado\ del\ campo$$

- **Establezca el modelo:** ya se tienen representadas las cantidades que influyen en el problema, por lo que el modelo es:

$$f(x) = x + x + x + x = 4x$$

- **Use el modelo:** se pide la cantidad de alambre necesario. Si la longitud del lado del campo es de 10 m, entonces se usa la función hallada de la siguiente manera:

$$f(10\ m) = 4(10m) = 40\ m\ de\ alambre$$

4.5. Funciones pares e impares

4.5.1 Función par

Una función par es aquella que satisface para todo su dominio la siguiente igualdad:

$$f(-x) = f(x).$$

Para determinar si una función es par o no, descriptivamente, se debe verificar que la gráfica de la función sea simétrica respecto al eje y.

Ejemplo

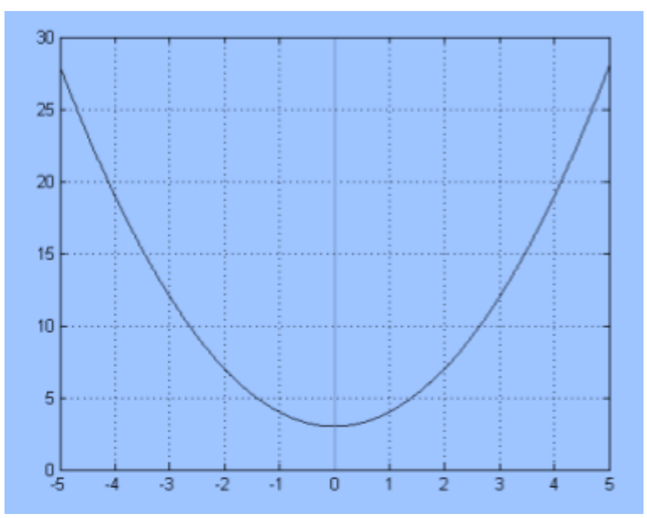
Determinar si la siguiente función es par:

$$f(x) = x^2 + 3$$

Para demostrar que esta función es par, se debe corroborar la siguiente igualdad $f(-x) = f(x)$. Entonces lo primero es hallar la función $f(-x)$. Se tiene:

$$f(-x) = (-x)^2 + 3 = (-1)^2x^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$$

Con la anterior demostración se confirma que efectivamente $f(x)$ es par. Para demostrarlo gráficamente, se puede ver que la función es simétrica respecto al eje Y:



Gráfica 4.16 Gráfica ejemplo función par.

4.5.2 Función impar

Una función es impar cuando satisface para todo su dominio la siguiente igualdad:

$$f(-x) = -f(x)$$

Para determinar si una función es impar o no, descriptivamente, se debe verificar que la gráfica de la función sea simétrica respecto al origen.

Ejemplo

Determinar si la siguiente función es impar:

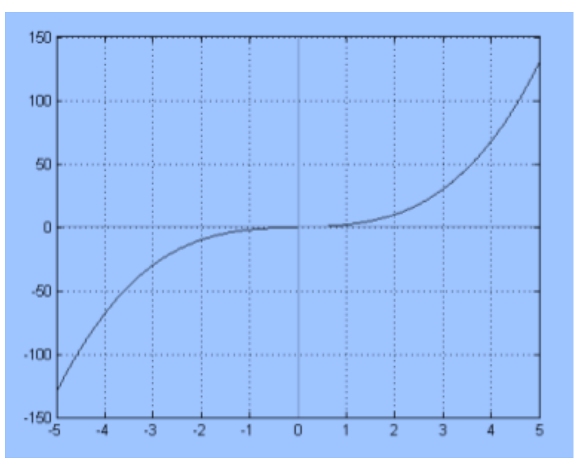
$$f(x) = x^3 + x$$

Para demostrar que esta función es impar, se debe corroborar la siguiente igualdad $f(-x) = -f(x)$.

Entonces lo primero es hallar la función $f(-x)$ y se tiene:

$$f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$

Con la anterior demostración se confirma que efectivamente $f(x)$ es impar. Gráficamente, se puede evidenciar que la función es simétrica respecto al origen.



Gráfica 4.17 Gráfica ejemplo función impar.

4.6. Álgebra de funciones

Se trata de la combinación de dos o más de funciones que se realizan con operaciones algebraicas.

Al tener las funciones $f(x) y\ g(x)$ las operaciones que pueden existir entre éstas son:

Suma de funciones

La nueva función es conocida como $(f+g)(x)$ en donde se suman todos los términos semejantes de cada una de las funciones. El nuevo dominio de esta función es la intersección de los dominios de ambas funciones.

Resta de funciones

La nueva función es conocida como $(f-g)(x)$ en donde se restan todos los términos semejantes, teniendo en cuenta cual es el minuendo y el sustraendo ya que la resta no es conmutativa. El nuevo dominio de esta función es la intersección de los dominios de ambas funciones.

Producto de funciones

La nueva función es conocida como $(fg)(x)$ en donde se multiplica una función con otra. Para simplificar se hace uso de la propiedad distributiva de la multiplicación. El nuevo dominio de esta función es la intersección de los dominios de ambas funciones.

Cociente de funciones

La nueva función es conocida como $(f/g)(x)$ en donde se divide una función entre otra, y se deben realizar las simplificaciones y racionalizaciones necesarias. El nuevo dominio de esta función es la intersección de los dominios de ambas funciones sin aquellos valores de x que hacen que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo

Mediante álgebra, hallar las siguientes funciones:

$$(f+g)(x)\ ,\ \ (f-g)(x),\ \ (f.g)(x)\ \ y\ \ (f/g)(x),$$

para: $f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = x^2 + 2x$

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x^2 + 2x = 2x^2 + 2x$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x^2 + 2x = 2x$
- $(f.g)(x) = f(x).g(x) = x^2(x^2 + 2x) = x^4 + 2x^3$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+2x} = \frac{x^2}{x(x+2)} = \frac{x}{x+2}$; $Para\ x \neq 0$

4.7. Composición de funciones

Se trata de la forma de combinar dos funciones para obtener una nueva. Se puede definir como una función dentro de otra y se expresa: $(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$, lo que quiere decir "f compuesta con g".

Para realizar la composición $(fog)(x)$, se reemplaza en la función $f(x)$ la variable x por la función $g(x)$ y se realizan las operaciones necesarias para simplificar la nueva función.

El dominio de la nueva función es la componen los valores de x que estén en el dominio de $g(x)$ y que a la hora de reemplazar en $f(x)$ estén también definidos.

Una propiedad importante de la composición es la siguiente:

$$(fog)(x) \neq (gof)(x)$$

Es decir, la composición de funciones **no es conmutativa.**

Ejemplo

Realizar las composiciones $(fog)(x)\ y\ (gof)(x)$, para las siguientes funciones:

$$f(x) = 3x - 2 \quad y \quad g(x) = x^2 + 5$$

- $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 5) = 3(x^2 + 5) - 2 = 3x^2 + 15 - 2 = 3x^2 + 13$

- $(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2 + 5 = 9x^2 - 12x + 4 + 5 = 9x^2 - 12x + 9$

En este ejemplo, se puede verificar que $(fog)(x) \neq (gof)(x)$.

4.8 Función inyectiva e inversa

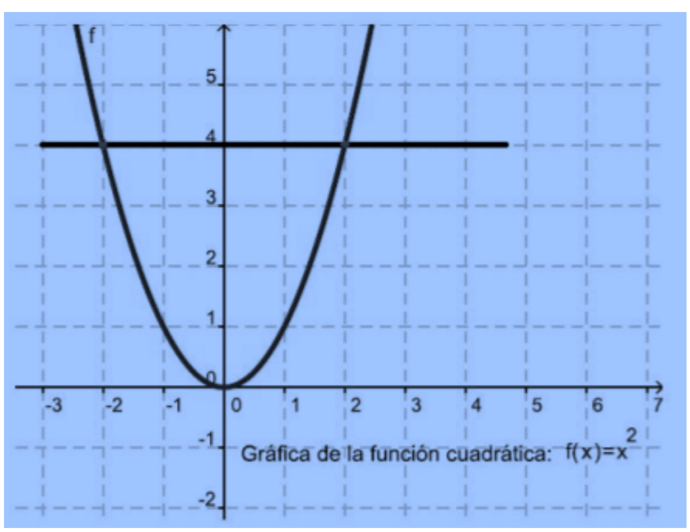
4.8.1 Función inyectiva

Una función es **inyectiva** cuando es uno a uno; es decir, a un elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango. Una forma de expresar que una función es uno a uno es la siguiente:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

La anterior expresión quiere decir que para que la función tome un mismo valor en dos puntos (x_1 y x_2), estos puntos deben ser iguales.

Adicionalmente, y como aparece en la siguiente gráfica, la función no es **inyectiva**, debido al **criterio de la recta horizontal**, que es cuando se encuentra alguna recta horizontal en el plano cartesiano que corte la gráfica de la función en dos puntos. A continuación es posible observar que la función $f(x) = x^2$ para el dominio de los números reales no es inyectiva.



Gráfica 4.18 Función no inyectiva.

4.8.2 Función inversa

Si una función f es inyectiva con dominio A y rango B, entonces tiene una función inversa que está definida de la siguiente manera:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

En donde el dominio de la nueva función f^{-1} es el rango de f, y el rango de f^{-1} es el dominio de f. Para hallar la función inversa se debe expresar la variable independiente en función de la dependiente y esta nueva función es denominada inversa.

Para comprobar si una función es inversa de otra función se utiliza el siguiente criterio:

$$(f o f^{-1}) = x = (f^{-1} o f)$$

Solo en este caso la composición de funciones si es conmutativa.

Ejemplo

Hallar la función inversa de la siguiente función:

$$y = f(x) = \sqrt{x} - 5$$

Primero se identifica el dominio y rango de la función:

- **Dominio**: x no puede tomar valores negativos, ya que no están definidos para la raíz cuadrada, por lo que el dominio es $x \geq 0$.

- **Rango**: la raíz solo representa a los números positivos y se le resta una constante. Entonces el rango de la función sería $y \geq -5$.

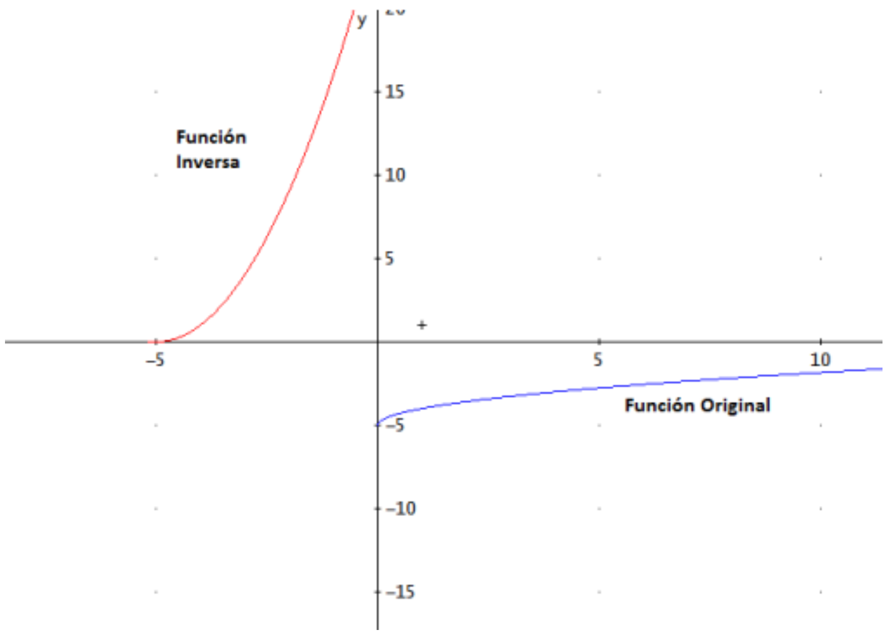
Una vez obtenido el dominio y el rango de la función, se pasa a demostrar que la función es inyectiva. Para esto hay que:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \iff \quad x_1 = x_2$$

Entonces se tiene:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} - 5 = \sqrt{x_2} - 5 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow \left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}\right)^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Con lo anterior, se demuestra que la función es **Inyectiva.** Y esto también se puede observar en la siguiente gráfica aplicando el criterio de la recta horizontal.



Gráfica 4.19 Gráfica del ejemplo

Por último, para hallar la inversa se debe expresar la variable dependiente en función de la independiente, entonces se tiene:

$$y = \sqrt{x} - 5 \;\Rightarrow\; y + 5 = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x = (y+5)^2$$

Así, la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = (x+5)^2$$

4.9 Función exponencial y logarítmica

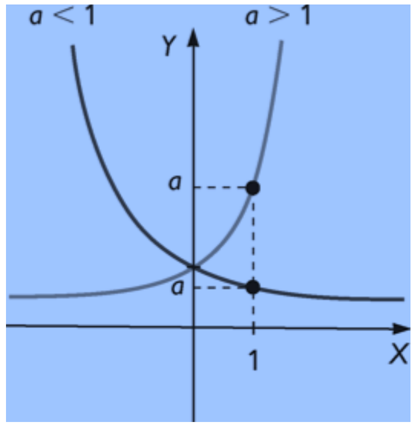
4.9.1 Función exponencial

Una función exponencial se define de la siguiente manera:

$$f(x) = a^x$$

Donde a es la base de la función exponencial.

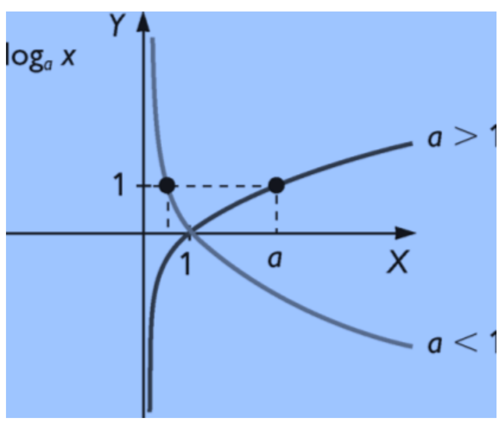
El comportamiento de la función exponencial se puede apreciar en la siguiente gráfica.



Gráfica 4. 20. Función exponencial[2].

4.9.2 Función logarítmica

El comportamiento de la función logarítmica se puede apreciar en la siguiente gráfica:



Gráfica 4. 20. Función logarítmica[3].

Hay una relación entre la función exponencial y la función logarítmica, y es la siguiente:

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

[2] Tomada de matematicasnovenolafragua.blogspot.com
[3] Tomada de matematicasnovenolafragua.blogspot.com

Según lo anterior, esto cumple la definición de una función inversa; es decir, la función logaritmo y la función exponencial son funciones inversas entre sí.

4.10 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, son aquellas ecuaciones que involucran en alguno de sus términos funciones exponenciales o logarítmicas. Para resolver estas ecuaciones se hace uso de la propiedad de composición de la función inversa $(fof^{-1}) = x$, y hay dos maneras de resolverlas:

4.10.1 Función exponencial

Si se encuentra una función exponencial de la siguiente manera $a^x = b$, donde a y b son constantes, para despejar la incógnita x, se aplica la función inversa (Logaritmo en base a) en ambos lados de la ecuación y así se obtendrá el valor de x.

$$a^x = b \;\Rightarrow\; \log_a a^x = \log_a b \;\Rightarrow\; x = \log_a b$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación:

$$5e^x - 5 = 32$$

Para resolver esta ecuación se debe dejar la exponencial a un lado de la igualdad y al otro lado los demás términos:

$$5e^x - 5 = 32 \;\Rightarrow\; e^x = \frac{37}{5}$$

Una vez hecho esto, se debe aplicar logaritmo en base e (Logaritmo natural) en ambos lados de la igualdad:

$$ln(e^x) = ln\left(\frac{37}{5}\right) \;\Rightarrow\; x = ln\left(\frac{37}{5}\right)$$

Cómo resultado final se tiene que $x \approx 2.0015$.

4.10.2 Función logarítmica

Si se encuentra una función logarítmica de la siguiente manera $\log_a x = b$, donde a y b son constantes, para despejar la incógnita x, se aplica la función inversa (Exponencial con base a) en ambos lados de la ecuación y así se obtendrá el valor de x.

$$\log_a x = b \;\Rightarrow\; a^{\log_a x} = a^b \;\Rightarrow\; x = a^b$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación:

$$5 \ln 2x = 25$$

Para resolver esta ecuación se debe dejar el logaritmo a un lado de la igualdad y al otro lado los demás términos:

$$5 \ln 2x = 25 \;\Rightarrow\; \ln 2x = \frac{25}{5} \;\Rightarrow\; \ln 2x = 5$$

Una vez hecho esto, se debe aplicar una función exponencial en base e en ambos lados de la igualdad:

$$e^{\ln 2x} = e^5 \;\Rightarrow\; 2x = e^5 \;\Rightarrow\; x = \frac{e^5}{2}$$

Cómo resultado final se tiene que $x \approx 74.2066$.

Resumen

En esta cuarta unidad se evidenció que el estudio de las funciones es un tema indispensable y de mucha aplicación en la ingeniería.

La mayoría de las situaciones o casos de la vida real se pueden representar mediante el modelado, algebra y composición de funciones.

Por último, las funciones exponencial y logarítmica, inversas mutuamente y de gran importancia en las matemáticas debido a su campo de aplicación.

Bibliografía

- STEWART, J. (2008). Pre cálculo. 5ª. Edición. Thompson Editores.
- SWOKOWSKI, E. (1998). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Tomson Editores. 9ª Edición. México,.
- URIBE CALAD, JA. (1986).Julio Alberto. Matemáticas básicas y operativas. Susaeta ediciones & cia. ltda.

Referencias web

- http://www.vitutor.com/fun/2/c_1.html
- http://www.aprendematematicas.org.mx/notas/funciones/DGB4_1_2_4.pdf
- http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/algfw.htm