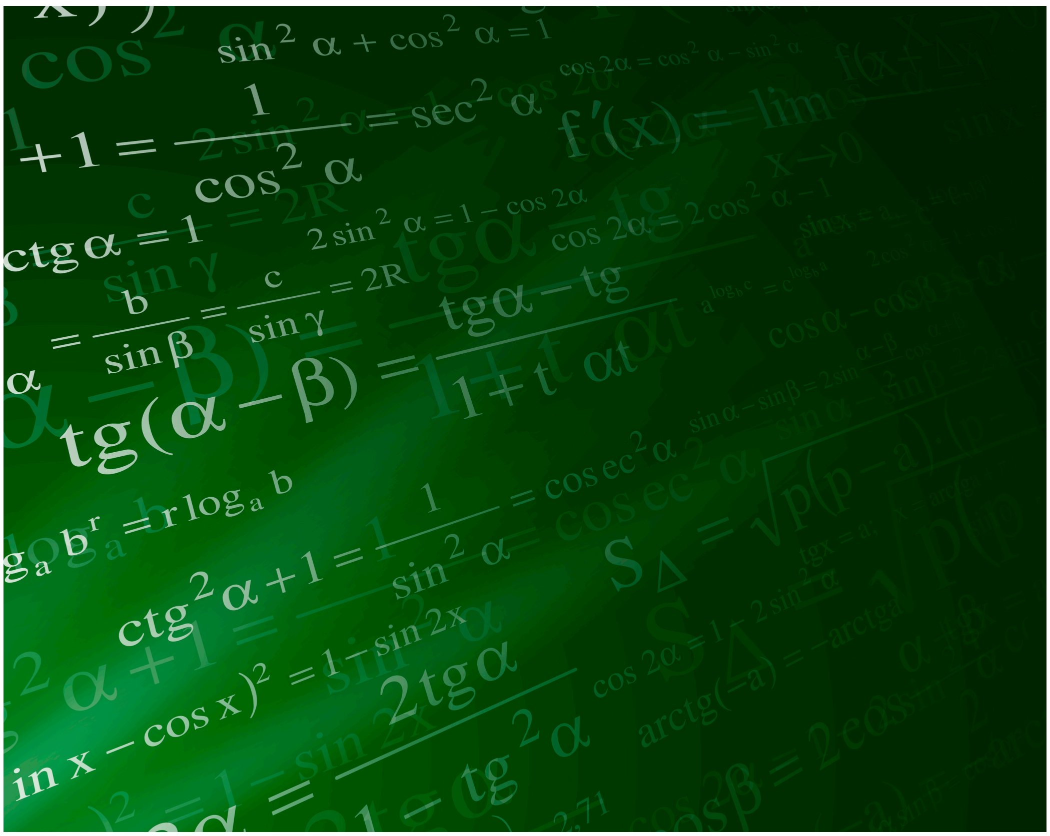
UNIDAD 3. GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y ANALÍTICA - TRIGONOMETRÍA



La geometría euclidiana está basada en la teoría de Euclides y se basa en definiciones como la línea, el punto y las propiedades geométricas.

Tabla de contenido

Introducción

La geometría euclidiana es una parte importante del estudio de las matemáticas, ya que con ella se pueden relacionar figuras geométricas y establecer analíticamente áreas y volúmenes de figuras que se usan cotidianamente como los polígonos y los poliedros.

Así mismo, el estudio del triángulo, que es de lo que trata la Trigonometría, se constituye en un aspecto de gran importancia para el desarrollo del cálculo, que junto con las funciones trigonométricas y la resolución de los triángulos rectángulos se convierten en aspectos necesarios para aplicar a los problemas de la vida real.

Finalmente, la gráfica de ecuaciones y la solución de sistemas de ecuaciones resulta de gran utilidad para aplicar a cualquier tipo de problemas. Esas son las razones por las que es necesario abordar estos temas, pues resultan ser unas bases sólidas para el cálculo.

Objetivos

Objetivo general

Conocer y desarrollar la trigonometría y geometría euclidiana, al igual que sus diferentes teoremas.

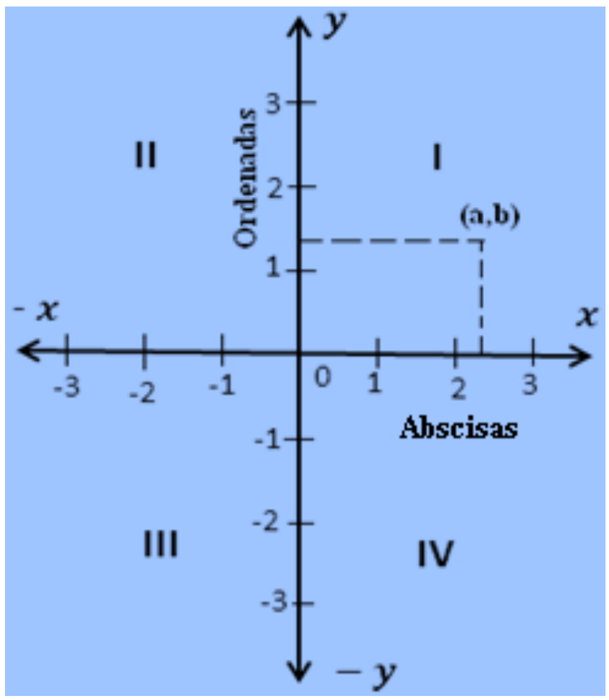
Objetivos específicos

- Analizar y comprender la geometría plana y sus aplicaciones.
- Conceptualizar y practicar la geometría analítica mediante la solución de problemas prácticos.
- Medir y calcular volúmenes de diferentes sólidos.
- Resolver problemas que incluyen parábolas, elipses e hipérbolas.
- Solucionar sistemas de ecuaciones lineales por diferentes métodos.

3.1 Plano coordenado

El plano coordenado o plano cartesiano es una representación del espacio en dos dimensiones. En éste se pueden obtener pares ordenados de **coordenadas (a, b)** para establecer la posición de cualquier punto en el plano.

La primera coordenada **a** es la correspondiente a las **abscisas, eje *x* o eje horizontal del plano** y la segunda **b** corresponde a las **ordenadas, eje *y* o eje vertical del plano.** El eje x y el eje y dividen el plano coordenado en cuatro cuadrantes, los cuales se pueden observar en la siguiente figura:



Gráfica 3.1. Plano cartesiano.

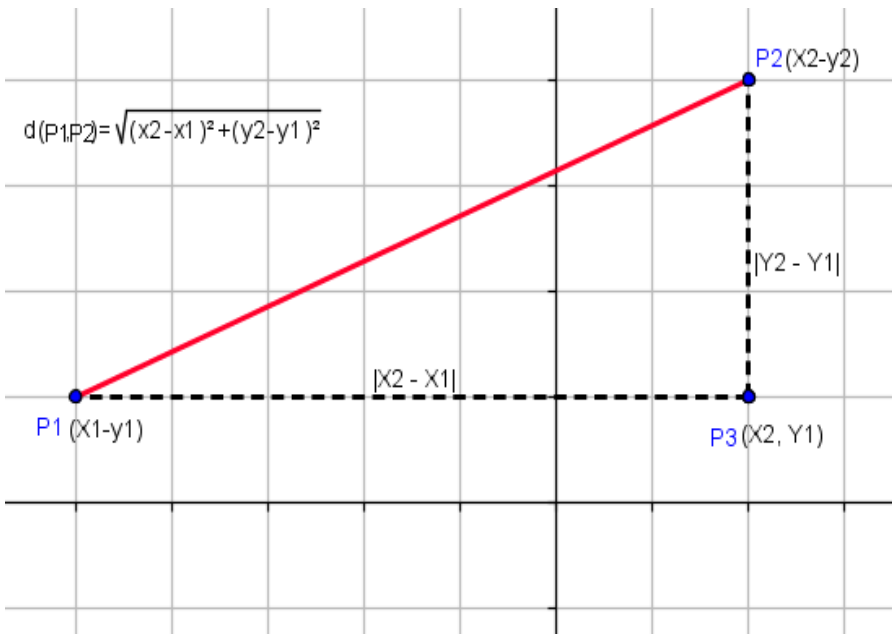
Estos cuadrantes poseen las siguientes características en sus coordenadas:

- **Cuadrante I**: ambas coordenadas son positivas.
- **Cuadrante II**: las coordenadas del eje x son negativas y las del eje y son positivas.
- **Cuadrante III**: ambas coordenadas son negativas.
- **Cuadrante IV**: las coordenadas del eje x son positivas y las del eje y son negativas.

3.1.1 Distancia

Dado dos puntos o los dos pares de coordenadas $P1\,(x_1, y_1)\; y\; P2\,(x_2, y_2)$, es importante conocer la distancia que se encuentra entre éstos; para ello se aplica el teorema de Pitágoras como se muestra en la siguiente gráfica, de la que se obtiene la siguiente fórmula:

$$d(P1, P2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Gráfica 3.2. Plano cartesiano.

3.1.2 Punto medio

Dado dos puntos o los dos pares de coordenadas: $P1\,(x_1, y_1)\; y\; P2\,(x_2, y_2)$, es importante conocer el punto medio entre ellos dos; es decir encontrar un punto donde la distancia a los puntos sea igual.

Las coordenadas de este punto medio están dadas por la siguiente fórmula:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo

Hallar la distancia y el punto medio del siguiente par de puntos:

$$P1(-3{,}8) \qquad P2(1{,}5)$$

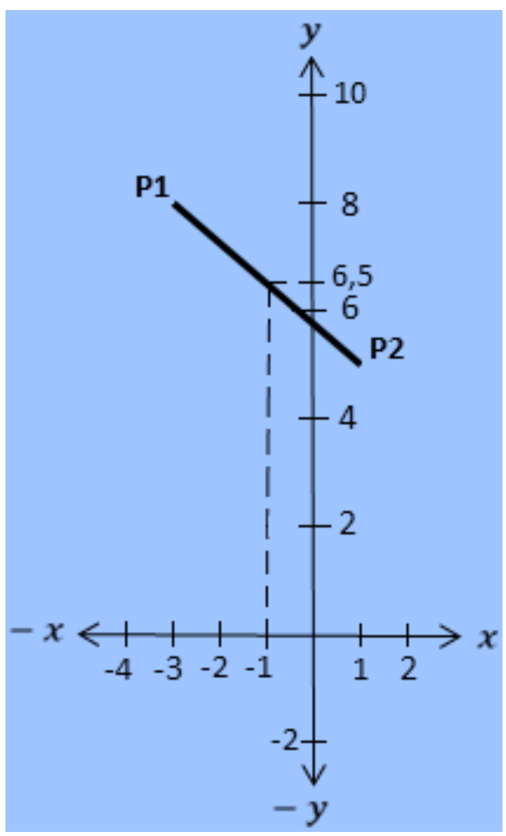
Para la solución se aplican las fórmulas dadas anteriormente, entonces la distancia estaría dada por:

$$d(P1,P2) = \sqrt{(-3-1)^2 + (8-5)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Entonces, el punto medio sería:

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{8+5}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{13}{2}\right) = \left(-1, \frac{13}{2}\right)$$

Solución:



Gráfica 3.3 Punto y distancia

3.2 Representación gráfica de ecuaciones

En el plano coordenado es posible representar ecuaciones en donde se ven involucradas dos incógnitas (*x, y)*. Entonces, la gráfica de una ecuación es todo par de coordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación dada. Es decir, es un conjunto de puntos que al reemplazarlos en la ecuación se obtiene el resultado esperado.

Cuando se grafican las ecuaciones, que son del tipo $ax + by = c$, donde x y y son las incógnitas de la ecuación, se deben seguir los siguientes pasos:

- **Despejar una incógnita**: se debe dejar una incógnita a un lado de la ecuación completamente sola, como se ve a continuación:

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

- **Obtener valores de y**: se reemplaza x por diferentes valores, y así se obtiene cada valor de x dado un valor de y. De esta manera se consiguen parejas ordenadas que serían las coordenadas de los puntos que satisfacen la ecuación.

- **Observación:** siempre que la ecuación sea lineal y se vean involucradas dos incógnitas, la gráfica de ésta será una línea recta.

Ejemplo

Graficar la siguiente ecuación:

$$5y - 3x = 6$$

- Despejar una incógnita: en este caso se despejará la incógnita y. Para ello, se aplican las propiedades de la igualdad vistas anteriormente; y así se tiene:

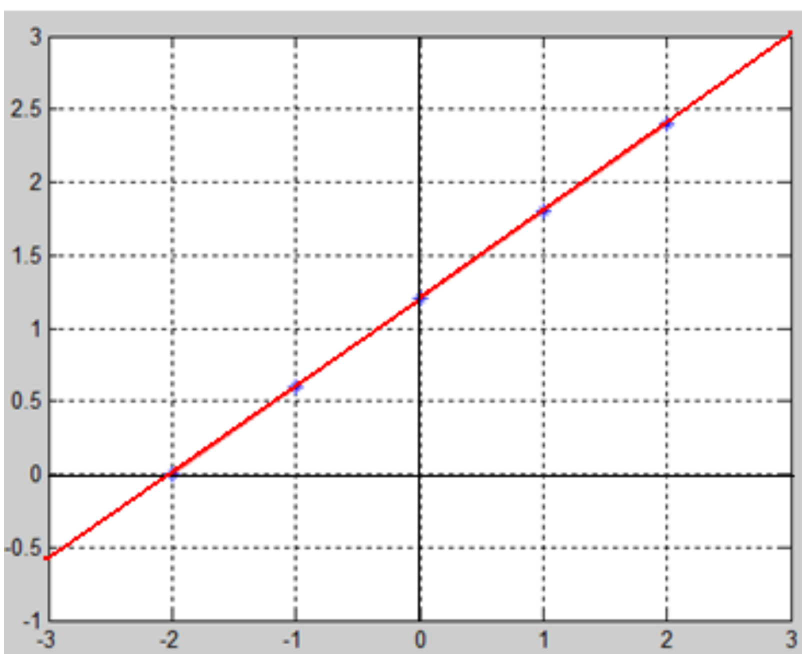
$$y = \frac{6 + 3x}{5}$$

- Obtener valores de y: para esto se realizará una tabla que permite obtener los valores de y para ciertos valores escogidos de x:

X	Y
-2	0
-1	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{6}{5}$
1	$\frac{9}{5}$
2	$\frac{12}{5}$

Gráfica 3.4 Tabla tabulación, ejemplo.

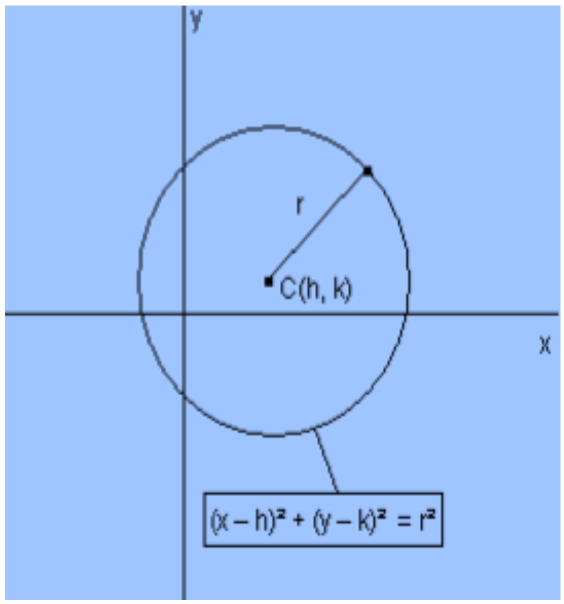
Una vez obtenido estos datos expuestos en la tabla, se procede a graficar. Para ello, se unen los puntos hallados por medio de una línea recta y se obtiene la gráfica de la ecuación:



Gráfica 3.5 Gráfica de la Ec. $5y - 3x = 6$.

3.3 La circunferencia

Una circunferencia es una curva en el plano, en donde todos los puntos P_i que la contienen están a una distancia r (radio) del centro C de la misma; como se puede observar en la siguiente imagen:



Gráfica 3.6 Gráfica de la circunferencia.

3.3.1 Ecuación de la circunferencia

Para determinar la ecuación de la circunferencia se buscan aquellos puntos P con coordenadas (x, y) que tengan una distancia r al centro C con coordenadas (h, k). Para esto se aplica la fórmula de la distancia:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

En esta ecuación de la circunferencia, su centro está en (h, k) y tiene un radio r así:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En consecuencia, si se tiene C (0,0); la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación, hallar el radio, el centro de la circunferencia y graficarla:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

- Primero se agrupan los términos con literales semejantes y se completa el cuadrado perfecto, como se menciona en los casos de factorización:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 8y + 16) - 16 = 0$$

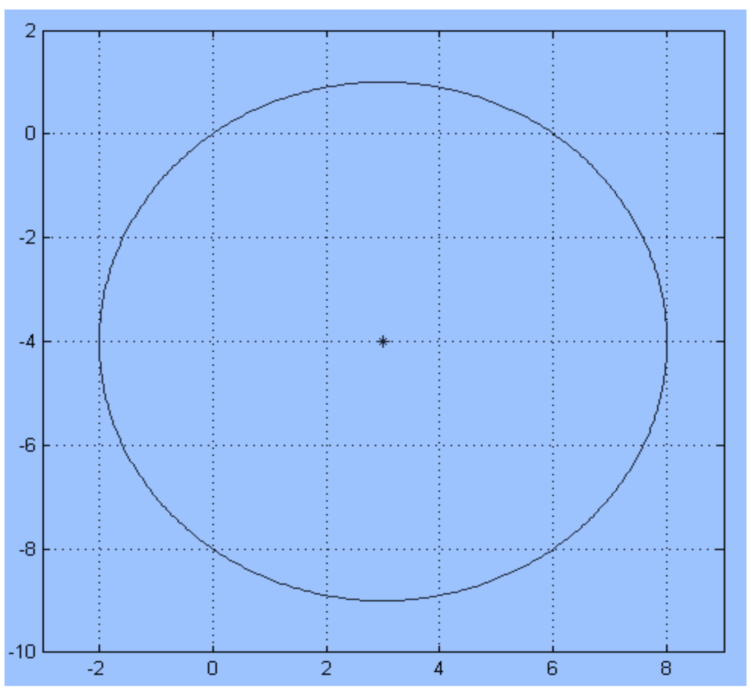
$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

- Una vez organizada la ecuación, de la anterior se deduce el radio r y el centro (h, k) de la siguiente manera:

$$r^2 = 25 \;\;\Rightarrow\;\; r = 5$$

$$h = 3 \;\; y \;\; k = -4$$

- La gráfica de la circunferencia sería:



Gráfica 3.7 Gráfica de la circunferencia resultado del ejemplo.

3.4 La recta

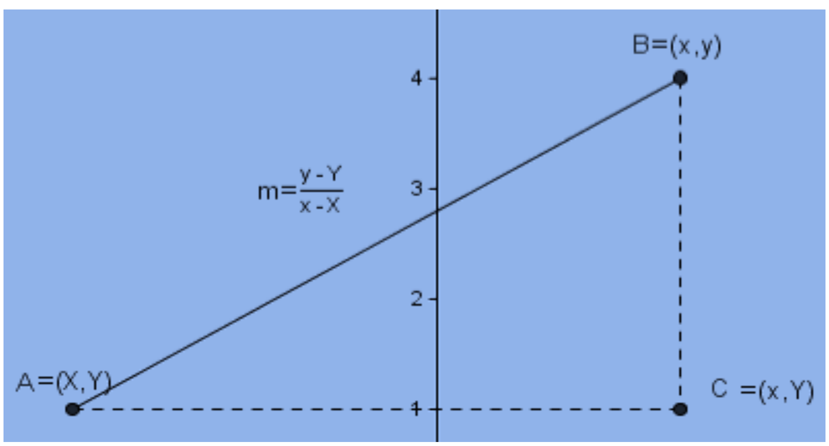
3.4.1 Pendiente de la recta

Cuando se hace referencia a una pendiente de una recta, se habla de una inclinación respecto al eje horizontal o de las abscisas; lo que quiere decir, que una recta horizontal tendrá una pendiente nula mientras que una vertical tendrá una pendiente infinita.

En términos generales la pendiente m de una recta se determina de la siguiente manera:

$$m = \frac{Desplazamiento\ vertical}{Desplazamiento\ horizontal} = \frac{y}{x}$$

En el plano coordenado, y con una recta que pasa por los puntos $P\ (x, y)$ y $P_1\ (x_1, y_1)$, la pendiente se define de la siguiente manera: $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$



Gráfica 3.8 Pendiente de la recta.

3.4.2 Ecuación de la recta

La ecuación de una recta, en función de su pendiente y de un punto $P_1\ (x_1, y_1)$, que pasa por ella, se puede hallar utilizando la definición de pendiente y despejando una de las incógnitas de la ecuación. En este caso se tiene:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Ejemplo

Dado los siguientes dos puntos, determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos y graficarla.

$$P\ (3,2)\ \ ,\ \ Q\ (5,-2)$$

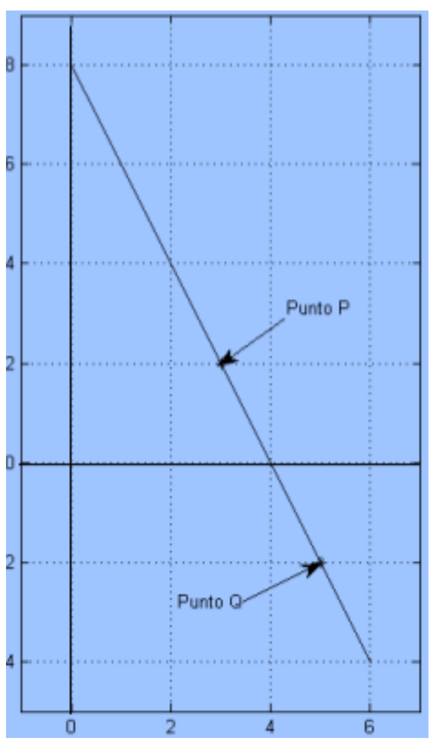
- Primero se debe hallar la pendiente de la recta. Para esto se tiene en cuenta lo visto anteriormente y se aplica la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-2-2}{5-3} = -\frac{4}{2} = -2$$

- Después de hallar la pendiente, se aplica la ecuación de la recta con cualquiera de los puntos que se dan; en este caso se usara el punto P:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \ \ \Rightarrow \ \ y = -2(x-3) + 2$$
$$\Rightarrow y = -2x + 8$$

- Una vez obtenida la ecuación de la recta, se procede a graficarla como se mencionó anteriormente cuando se trató el tema de gráfica de ecuaciones:



Gráfica 3.9 Pendiente de la recta. Resultado del ejemplo.

3.4.3 Rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas sí y solo sí su pendiente es igual. Dadas dos rectas con pendiente m_1 y m_2, son paralelas si: $m_1 = m_2$

A manera de ejemplo se tienen las siguientes ecuaciones de rectas paralelas (isocuantas):

$$y = 3x$$
$$y = 3x + 5$$
$$y = 3x - 7$$

3.4.4 Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si y solo si la pendiente de una es la recíproca con signo contrario de la otra. Dadas dos rectas con pendiente m_1 y m_2, son perpendiculares si:

$$m_1 m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

A manera de ejemplo se tienen las siguientes ecuaciones de rectas perpendiculares:

$$y = 3x + 2 \quad ; \quad y = -{}^{x}\!/_{3}$$

$$y = -\frac{3}{2}x \quad ; \quad y = \frac{2x}{3} + 5$$

3.5 Pendiente como razón de cambio

Una de las aplicaciones más comunes de la pendiente de una recta es la razón de cambio, ya que la pendiente se puede ver como la razón de cambio de una cantidad (y) contra otra cantidad (x).

El ejemplo más común es la velocidad (m/s), ya que se mira la razón de cambio entre distancia recorrida y el tiempo empleado para recorrerla.

- **Pendiente positiva:** se presenta cuando hay una relación directa entre ambas cantidades; es decir, si aumenta una, la otra aumentará en la misma proporción y viceversa.

- **Pendiente negativa:** existe cuando hay una relación inversa entre ambas cantidades; es decir si aumenta una, la otra disminuirá en la misma proporción y viceversa.

3.5.1 Modelos de variación directa e inversa

Modelo de variación directa: este caso se presenta cuando una cantidad (x) es múltiplo positivo de otra cantidad (y); es decir ambos varían directamente mediante una constante de proporcionalidad como se ve a continuación:

$$y = kx \ \ para \ \ k > 0$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. Como se observa, a medida que aumenta la cantidad x, la cantidad y también lo hace dependiendo del valor de la constante k.

Ejemplo 1

Determinar la distancia recorrida de un coche, si su velocidad es constante y es de 10 m/s y han pasado 4,5 segundos desde que empezó a moverse.

El modelo de variación directa para el problema es el siguiente:

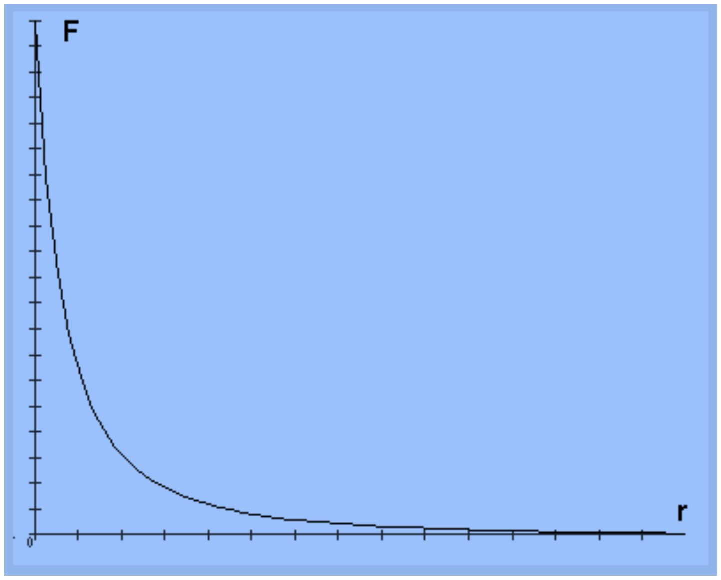
$$Distancia = Velocidad * tiempo$$
$$D = 10\frac{m}{s} * 4{,}5s = 45\ m$$

Después de 7 segundos se tiene:

$$D = 10\frac{m}{s} * 7s = 70\ m$$

Como se observa, entre más tiempo avance, la distancia recorrida será mayor, por lo que se tiene un modelo de variación directa.

Modelo de variación inverso: este caso se presenta cuando una cantidad (x) se relaciona con otra cantidad (y) de manera recíproca. Es decir si aumenta una cantidad la otra disminuye, pero esta no disminuye proporcionalmente. Así se observa en la siguiente gráfica:



Gráfica 3.10 Modelo de variación inverso.

La ecuación que caracteriza este modelo es la siguiente:

$$y = \frac{k}{x} \quad para\ k > 0$$

Ejemplo 2

Determinar el volumen que tiene un gas, cuando está bajo una presión de 60 kPa, y tiene una constante de compresión de 5,8.

Se ve que a medida de que aumenta la presión, el volumen baja por lo que se entiende que es un modelo de variación inversa. El modelo es:

$$Volumen = \frac{Constante\ de\ compresión}{Presión}$$

$$V = \frac{5{,}8}{60} = 0{,}0967\ m^3$$

Ahora, para 600 kPa, se tiene:

$$V = \frac{5,8}{600} = 0,00967\ m^3$$

Como se observa, a medida de que aumenta la presión, el volumen disminuye considerablemente, por lo que sí es un modelo de variación inversa.

3.6 Tipos de líneas y de ángulos

Las líneas pueden ser:

- Recta
- Curva
- Poligonal
- Mixta
- Cerrada

Los ángulos pueden ser:

- Agudo
- Recto
- Obtuso
- Llano
- Completo

3.7 Razones y proporciones - Teorema de Thales

Como ya se trató anteriormente **una razón es un cociente entre dos cantidades** y se puede ver como una fracción. **Una proporción es una igualdad entre dos razones,** que se pueden ver de la siguiente manera para las cuatro cantidades a, b, c y d:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La anterior proporción se lee "a es a b como c es a d": donde a y d son denominados **extremos** y b y c son denominados **medios**.

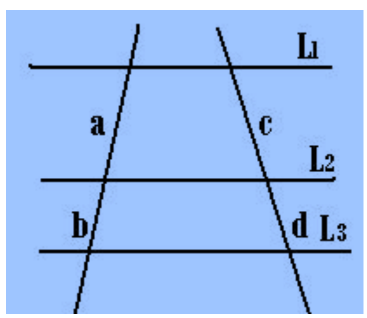
3.7.1 Propiedades de las proporciones

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$

3.7.2 Teorema de Thales

Si tres o más líneas paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de las longitudes de los segmentos que se encuentran en una línea transversal es proporcional a los de la otra línea.

La proporción de la siguiente figura es: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$



Gráfica 3.11 Teorema de Thales.

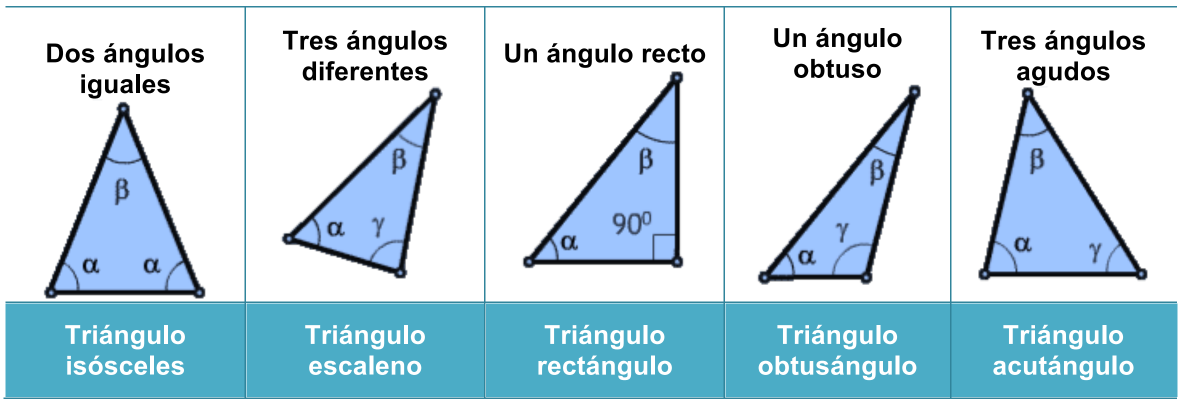
3.8 Triángulos y teoremas

Los triángulos pueden clasificarse según la longitud de sus lados y según sus ángulos. Para el primer caso éstos además pueden ser:

- **Triángulo equilátero:** todos sus lados son iguales.
- **Triángulo isósceles:** dos de sus lados son iguales.
- **Triángulo escaleno:** todos sus lados tienen diferente longitud.

De acuerdo con sus ángulos los triángulos se clasifican en:

- **Triángulo acutángulo:** todos sus ángulos tienen un valor inferior a 90°
- **Triángulo rectángulo:** uno de sus ángulos tiene un valor de 90°
- **Triángulo obtusángulo:** uno de sus ángulos es mayor a 90° y los otros dos son menores.



Gráfica 3.12 Tipos de triángulos.

3.8.1 Teorema de Herón

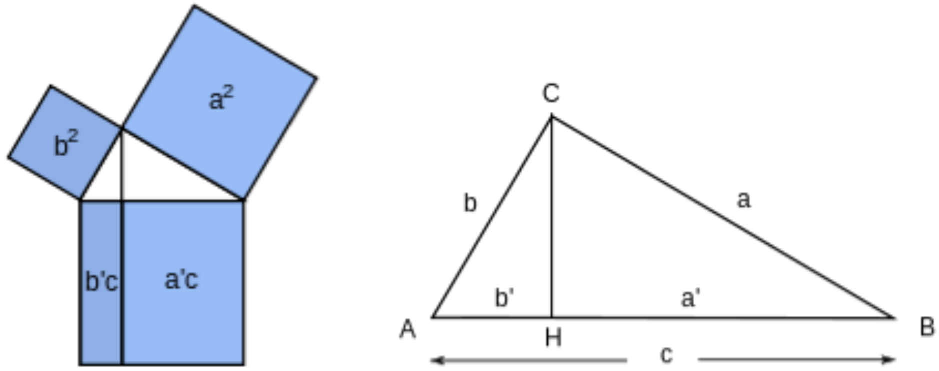
El teorema de Herón permite hallar el área de un triángulo únicamente sabiendo la longitud de sus lados. La ventaja de este teorema es que no se necesita tener un lado como base para poder calcular la altura. La fórmula de Herón es la siguiente: donde *a, b* y *c* son las longitudes de los lados del triángulo:

$$Área = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad donde \;\; s = \frac{a+b+c}{2}$$

3.8.2 Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras se refiere a una propiedad **única** de los triángulos rectángulos, que dice que el cuadrado de la hipotenusa (el lado con mayor longitud, h) es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos (los dos lados con menor longitud, a y b); es decir:

$$h^2 = a^2 + b^2 = r^2.$$



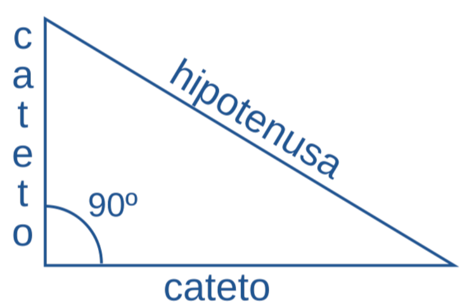
Gráfica 3.13 Teorema de Pitágoras.

3.9 Trigonometría de ángulos rectos

La trigonometría de ángulos rectos se refiere al estudio del triángulo rectángulo. Por medio de los ángulos que lo constituyen, uno de ellos de 90°, y las longitudes de sus lados, se obtienen las razones trigonométricas. Estas razones son usadas ampliamente para resolver problemas que tienen que ver con hallar ángulos o longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. De las razones trigonométricas, se obtienen las conocidas funciones trigonométricas.

3.9.1 Relaciones trigonométricas

Las relaciones o razones trigonométricas se basan en las razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo como el de la siguiente imagen:



Gráfica 3.14 Imagen de un triángulo rectángulo con sus respectivos catetos, su hipotenusa y su ángulo de noventa grados.

Debe tenerse en cuenta que el cateto vertical es denominado opuesto y el horizontal es el adyacente. Así, y con base en la gráfica anterior, las razones trigonométricas son:

- **Seno.** Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa y se denota de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{Opuesto}{Hipotenusa}$$

- **Coseno.** Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa y se denota de la siguiente manera:

$$cos\ \alpha = \frac{Adyacente}{Hipotenusa}$$

- **Tangente.** Se puede tomar como seno sobre el coseno; es decir, como la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente y se denota de la siguiente manera:

$$tan\ \alpha = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

- **Cosecante.** Es el reciproco del seno y se denota de la siguiente manera:

$$csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{Hipotenusa}{Opuesto}$$

- **Secante.** Es el reciproco del coseno y se denota de la siguiente manera:

$$sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{Hipotenusa}{Adyacente}$$

- **Cotangente.** Es el reciproco de la tangente y se denota de la siguiente manera:

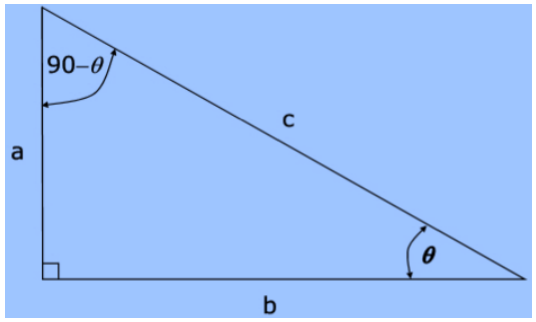
$$cot\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{Adyacente}{Opuesto} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

3.9.2 Aplicaciones a triángulos rectángulos

Como se vio anteriormente, las razones trigonométricas están aplicadas únicamente a los triángulos rectángulos; entonces se pueden resolver problemas como determinar longitudes y/o ángulos de los triángulos.

Ejemplo 1

Hallar el perímetro del triángulo que está en la siguiente figura, en donde $\theta = 60°$ y $a = 4$.



Gráfica 3.15 Triángulo rectángulo.

Para resolver este problema se deben utilizar las razones trigonométricas vistas anteriormente: primero se debe encontrar cuál es el cateto opuesto, el adyacente y la hipotenusa del triángulo. Para esto se debe ver donde está posicionado θ, y se tiene:

$$Opuesto = a \quad Adyacente = b \quad Hipotenusa = c$$

Con estos datos, se establecen las razones trigonométricas que permitirán resolver el problema:

$$sen\ \theta = \frac{a}{c} \Rightarrow sen\ 60° = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{sen\ 60°} = \frac{4}{0.866} = 4.62$$

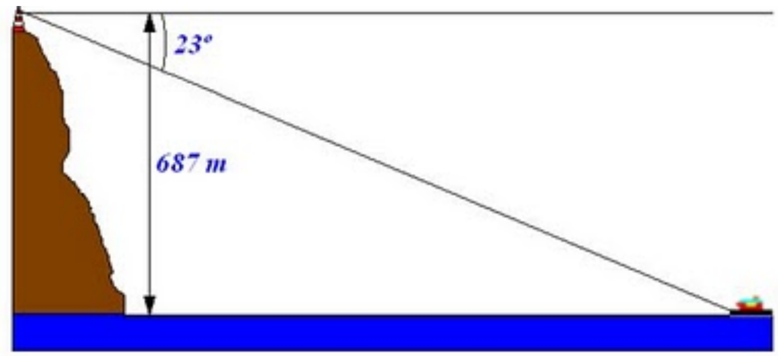
$$\cos\theta = \frac{b}{c} \Rightarrow cos\ 60° = \frac{b}{4.62} \Rightarrow b = 4.62(\cos 60°) = 4.62(0.5) = 2.31$$

Finalmente, se halla el perímetro con la suma de los tres lados de la siguiente manera:

$$P = a + b + c = 4 + 4.62 + 2.31 = 10.93$$

Ejemplo 2

Un observador se encuentra en un faro al pie de un acantilado. Está a 687m sobre el nivel del mar y desde ese punto ve un barco con un ángulo de 23°, como se aprecia en la gráfica 3.15. Se desea saber a qué distancia del acantilado se encuentra el barco.



Gráfica 3.15 Imagen de ejemplo ejercicio.

Se halla la distancia x entre el barco y el acantilado, conociendo un ángulo y un lado. Entonces, primero se identifican las partes del triángulo:

$$Adyacente = x \quad Opuesto = 687\ m \quad \theta = 23°$$

Como se desea conocer un cateto y no la hipotenusa, se usa una razón trigonométrica que relacione los dos catetos; en este caso es la hipotenusa que sería:

$$\tan\theta = \frac{Opuesto}{Adyacente} \Rightarrow \tan 23° = \frac{x}{687\ m}$$

Se resuelve para x. Así se obtiene la distancia entre el acantilado y el barco:

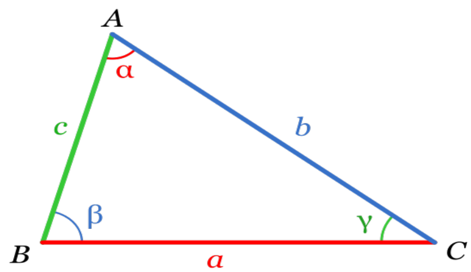
$$x = (687)\tan 23° = (687)(0{,}424) = 291{,}614\ m$$

3.10 Teorema del seno y coseno

Como se ha visto anteriormente, las razones trigonométricas se utilizan exclusivamente para cuando hay triángulos rectángulos involucrados, pero por medio de dos teoremas o leyes se logró extrapolar el uso del seno y el coseno para triángulos que no sean rectángulos.

3.10.1 Teorema del seno

El teorema del seno expresa que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos de cada uno.



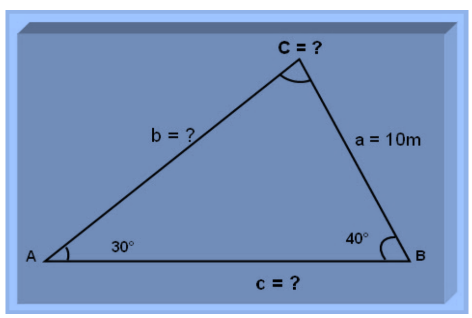
Gráfica 3.16 Teorema del seno.

Esta definición se expresa:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Ejemplo

Resolver el siguiente triángulo:



Gráfica 3.17 Ejercicio.

Para conocer el valor de los lados b y c y el valor del ángulo C, inicialmente se halla el valor de C; para ello, se conoce que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Entonces se tiene:

$$A + B + C = 180° \quad \Rightarrow \quad 30° + 40° + C = 180°$$
$$\Rightarrow \quad C = 180° - (30° + 40°) = 110°$$

Para determinar los lados que hacen falta del triángulo se utiliza la ley de los senos de la siguiente manera:

$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} \Rightarrow \frac{sen\ 30°}{10m} = \frac{sen\ 40°}{b}$$

$$\Rightarrow\ b = \frac{(10m)sen\ 40°}{sen\ 30°} = 12{,}855\ m$$

Se usa la otra relación de la ley del seno para poder hallar el lado c y se tiene:

$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ C}{c} \Rightarrow \frac{sen\ 30°}{10m} = \frac{sen\ 110°}{c}$$

$$\Rightarrow\ b = \frac{(10m)sen\ 110°}{sen\ 30°} = 18{,}794\ m$$

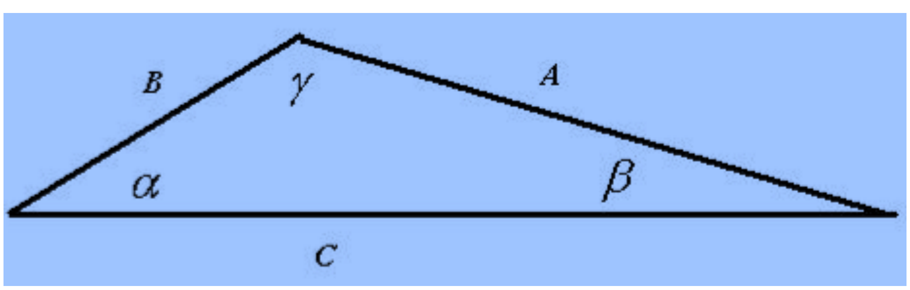
3.10.2 Teorema del coseno

El teorema del coseno permite relacionar un lado con los otros dos y su ángulo opuesto. En el triángulo de la gráfica 3.16, la ley del coseno se expresa de la siguiente manera:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,(\cos\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,(\cos\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,(\cos\gamma)$$

Ejemplo

Hallar el valor de C para cuando $A = 90, B = 40,\ \gamma = 50°$.

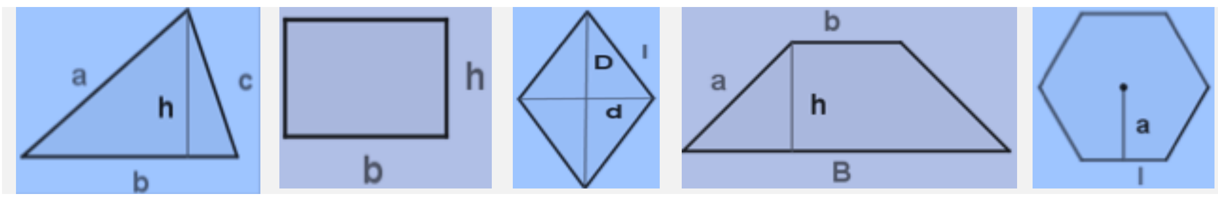


Gráfica 3.18 Ejercicio coseno.

Para resolver este problema se aplica la ley del coseno. Ya que se conocen dos lados del triángulo y un ángulo del mismo, entonces se aplica la ley:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\,(\cos\gamma)$$
$$C^2 = (90)^2 + (40)^2 - 2(40)(90)(\cos 50°)$$
$$C^2 = 9700 - 7200(\cos 50°)$$
$$C^2 = 5071{,}929 \;\Rightarrow\; C = \sqrt{5071{,}929} = 71{,}217$$

3.11 Polígonos



Gráfica 3.19 Triángulo, rectángulo, rombo, trapecio y polígono regular.

3.11.1 Triángulo

Para hallar el área del triángulo, conociendo sus tres lados, se utiliza el teorema de Herón, que se estudió anteriormente. Pero existe otra definición en función de la altura y la base, como se muestra en la gráfica 3.19; donde el área y el perímetro está dado por:

$$Perimetro = a + b + c \qquad Area = \frac{bh}{2}$$

3.11.2 Rectángulo

El cuadrado es un caso particular del rectángulo. Basados en la gráfica 3.19 donde b=h, el área y el perímetro del rectángulo está dado por:

$$Perimetro = 2(b + h) \qquad Area = bh$$

3.11.3 Rombo

El área y el perímetro de un rombo está dado por:

$$Perimetro = 4l \qquad Area = \frac{Dd}{2}$$

3.11.4 Trapecio

El área y el perímetro de un trapecio está dado por:

$$Perimetro = b + B + 2a \qquad Area = \frac{(B + b)h}{2}$$

3.11.5 Polígono Regular

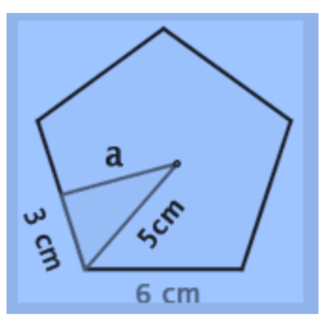
El área y el perímetro de un polígono regular está dado por:

$$Perimetro = nl \qquad Area = \frac{Perimetro * a}{2}$$

Donde n es la cantidad de lados y a es la apotema o distancia del centro del polígono al centro de cualquier lado, siendo siempre perpendicular a dicho lado.

Ejemplo

Calcular el área y perímetro del pentágono regular de:



Gráfica 3.20 Figura ejercicio de aplicación.

Primero se halla el perímetro de la figura, identificando el número de lados que tiene; en este caso, es un pentágono regular en donde el lado es $l = 6\,cm$, entonces el perímetro está dado por:

$$Perimetro = nl = 5(6\ cm) = 30\ cm$$

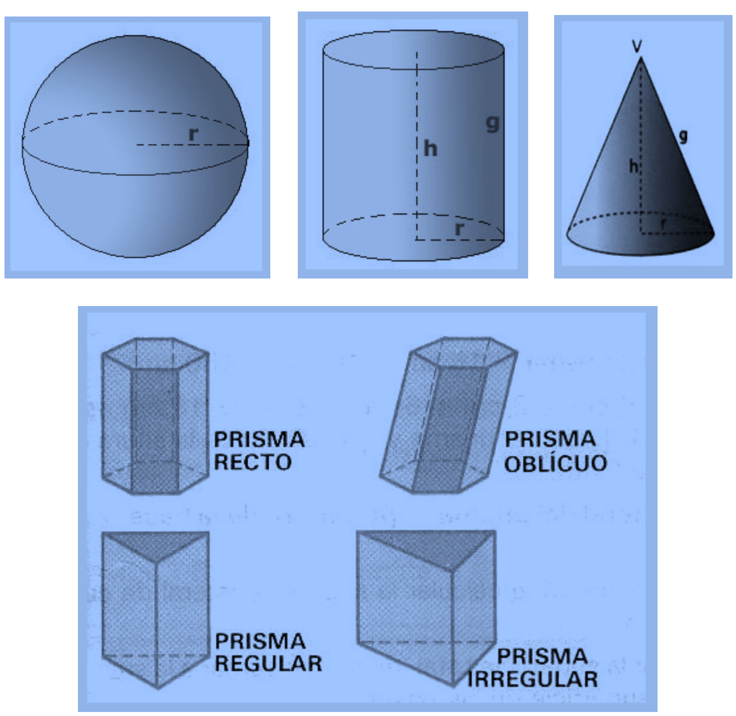
Para hallar el área se debe conocer la apotema. Para esto, según la figura, se debe hallar a, entonces se aplica el teorema de Pitágoras que dice:

$$a^2 = (5\ cm)^2 - (3\ cm)^2$$
$$a^2 = 25\ cm^2 - 9\ cm^2 = 16\ cm^2$$
$$a = \sqrt{16\ cm^2} = 4\ cm$$

Una vez hallada la apotema se aplica la fórmula para el área:

$$Area = \frac{Perimetro * a}{2} = \frac{(30\ cm)(4\ cm)}{2} = 60\ cm^2$$

3.12 Sólidos geométricos



Gráfica 3.21 Esfera, cilindro, cono y prisma.

3.12.1 Esfera

La esfera es un sólido generado por revolución al hacer girar una semicircunferencia alrededor del eje, que pasa por el centro de la misma. Su volumen y área lateral está dada por:

$$Area\ lateral = 4\pi r^2 \qquad Volumen = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3.12.2 Cilindro

Un cilindro es un sólido generado por revolución al hacer girar un rectángulo por alguno de sus lados. El volumen y el área lateral está dada por:

$$Area\ lateral = 2\pi r(r + h) \qquad Volumen = \pi r^2 h$$

3.12.3 Cono

Un cono es un sólido generado por revolución al hacer girar un triángulo rectángulo por alguno de sus catetos. El volumen y el área lateral del cono está dada por:

$$Area\ lateral = \pi r^2 + \pi r g \qquad Volumen = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Como se observa en la gráfica 3.21, g es la generatriz.

3.12.4 Prisma

El prisma es un sólido que consta de dos caras iguales que son polígonos regulares o irregulares, y de unas caras laterales que son conocidas como paralelogramos.

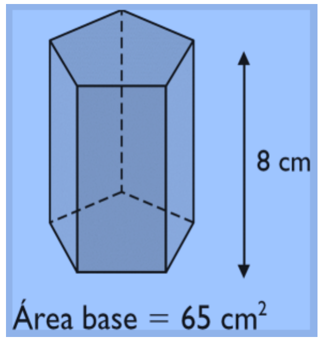
Dependiendo de la cantidad de lados del polígono que conforma el prisma, se halla el volumen y el área lateral. Entonces, el área y el volumen se definen de la siguiente manera:

- **Área**: es la suma del área de los dos polígonos que conforman el prisma, más el área de cada paralelogramo de las caras laterales.

- **Volumen**: es el área del polígono que conforma el prisma multiplicado por la altura del mismo.

Ejemplo

Hallar el volumen del siguiente prisma:

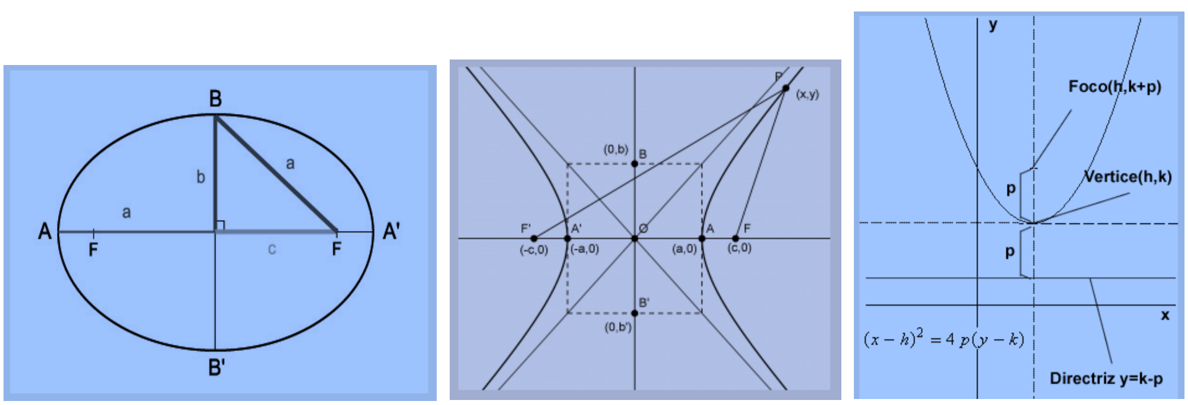


Gráfica 3.21 Prisma ejemplo.

Como se observa, se trata de un prisma con base pentagonal; el ejercicio dice que el área del pentágono es de 65 cm^{2},. Entonces simplemente se multiplica el área por la altura, que es de 8 cm.

$$V = 65cm^2(8\ cm) = 520cm^3$$

3.13 Elipse, parábola e hipérbola



Gráfica 3.21 Elipse, hipérbola y parábola.

Parábola

Una parábola es un conjunto de puntos equidistante a un punto denominado **foco (F)** y a una recta denominada **directriz (l).** El **vértice (V)** está en la mitad entre al foco y la directriz y el **eje de simetría** es aquel que pasa por el vértice y el foco y es perpendicular a la directriz. La ecuación que describe a la parábola es la siguiente:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde p es la **distancia focal**, la distancia del vértice al foco, o la distancia del vértice a la directriz. El vértice está ubicado en (h, k).

Elipse

Una elipse es un conjunto de puntos que la suma de las distancias de estos a dos puntos $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ es constante. Estos dos puntos son denominados los **focos** de la elipse. La línea que corta estos dos puntos se **denomina eje mayor** y el que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor se denomina **eje menor**. La ecuación que describe a la elipse es la siguiente:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde a es la distancia entre el centro y el punto en donde corta el eje mayor de la elipse, b es la distancia entre el centro y el punto donde corta el eje menor de la elipse y el centro se encuentra ubicado en (h, k). En la elipse existe la particularidad de que: $b^2 + c^2 = a^2$ donde c es la distancia del centro a alguno de los focos de la elipse.

Hipérbola

Una hipérbola es un conjunto de puntos en el que la diferencia de las distancias a los dos puntos $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, que son denominados **focos** de la hipérbola, es constante. Del centro de la hipérbola se extienden dos rectas que se conocen como las **asíntotas** de la hipérbola.

La ecuación que describe a la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$Asintotas \ \Rightarrow \ (y-k) = \pm\frac{b}{a}(x-h)$$

El centro de la hipérbola se encuentra ubicado en (h, k).

3.14 Sistema de ecuaciones

Se trata de un sistema que describe un problema con ayuda de varias ecuaciones. Para resolverlo y conocer sus incógnitas necesita combinarse. Vale aclarar que para este estudio solo se verán sistemas de ecuaciones que tienen la misma cantidad de ecuaciones y de incógnitas; como aparece en el siguiente sistema:

$$2x + y = 5$$
$$3x - 2y = 5$$

Para resolver un sistema de ecuaciones se pueden utilizar, entre otros, los métodos de sustitución, igualación y eliminación.

3.14.1 Sustitución

Para resolver un sistema por sustitución, lo que se hace es que en una de las ecuaciones se despeja una incógnita y se reemplaza en la siguiente ecuación; operación que se realiza así sucesivamente hasta obtener una ecuación con solo una incógnita para resolver.

Ejemplo

$$y = 5 - 2x$$
$$3x - 2y = 5 \;\Rightarrow\; 3x - 2(5 - 2x) = 5$$
$$3x - 10 + 4x = 5 \;\Rightarrow 7x = 15 \;\Rightarrow\; x = \frac{15}{7}$$

Para resolver por sustitución, se despeja una incógnita cualquiera de alguna de las ecuaciones y se reemplaza en la otra. En este caso para facilidad se va a despejar y de la ecuación 1 y se reemplazará en la ecuación 2:

Como se observa ya se solucionó la ecuación para la incógnita x, ahora se reemplaza en 1, para hallar la solución de y:

$$y = 5 - 2\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Entonces la solución al sistema es:

$$x = \frac{15}{7} \quad ; \qquad y = \frac{5}{7}$$

3.14.2 Igualación

Para resolver un sistema por igualación, lo que se hace es despejar en dos ecuaciones la misma incógnita; como se tiene una expresión para la misma incógnita se igualan y se sigue despejando e igualando hasta obtener una ecuación con solo una incógnita para resolver.

Ejemplo

Para resolver por igualación, como dice la definición se despeja la misma variable en dos ecuaciones y como es la misma variable se igualan. Consecuentemente, en 1 y 2 se va a despejar y:

$$y = 5 - 2x$$
$$y = \frac{3x - 5}{2}$$

Ahora, se procede a hacer la igualación y hallar la solución para *x;* después, se resuelve la siguiente ecuación resultante, así:

$$5 - 2x = \frac{3x - 5}{2} \qquad \Rightarrow 10 - 4x = 3x - 5$$
$$\Rightarrow \quad 15 = 7x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{7}$$

Una vez hallado x, se reemplaza en 1 o en 2 para hallar y:

$$y = 5 - 2\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Arrojando entonces la misma solución que por el método de sustitución, así:

$$x = \frac{15}{7} \quad ; \qquad y = \frac{5}{7}$$

3.14.3 Eliminación

Para resolver un sistema por eliminación, lo que se hace es multiplicar toda una ecuación por un coeficiente diferente de cero que permita que al ser sumada con otra ecuación se elimine una de las incógnitas. Esto se hace hasta que se obtenga una ecuación con solo una incógnita para resolver.

Ejemplo

Para resolver por medio de la eliminación, se debe hallar un coeficiente para multiplicar alguna de las ecuaciones y que al sumarla con la otra se elimine una incógnita. En este caso si usamos como coeficiente 2, para multiplicar la ecuación 1, se observa que al sumarla con la ecuación 2 se elimina la incógnita y:

$$2x + y = 5 \quad \Rightarrow 2(2x + y) = 5(2) \;\Rightarrow 4x + 2y = 10$$

Ahora a esta ecuación se le suma la otra ecuación para eliminar y:

$$\begin{array}{c} 4x + 2y = 10 \\ \underline{3x - 2y = 5} \\ 7x = 15 \\ x = \dfrac{15}{7} \end{array}$$

Una vez hallado x, se reemplaza en alguna de las ecuaciones y se halla y:

$$2x + y = 5 \;\Rightarrow 2\left(\frac{15}{7}\right) + y = 5 \;\Rightarrow y = \frac{5}{7}$$

Dando la misma solución de los dos métodos anteriores.

3.14.4 Ejercicios

Dado los siguientes puntos, determinar la distancia y el punto medio entre ellos.

$$P1(-3,2) \qquad P2(-5,-7)$$

Solución:
Se aplica la definición de distancia entre los dos puntos:

$$d(P1, P2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-3+5)^2 + (2+7)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$$

Se aplica la definición de punto medio:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-3-5}{2},\frac{2-7}{2}\right)=\left(\frac{-8}{2},\frac{-5}{2}\right)=(-4,-2.5)$$

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación, determinar el centro y el radio de la circunferencia que describa.

$$x^2+y^2-10y=0$$

Se busca completar un binomio cuadrado de la siguiente manera:

$$x^2+(y^2-10y+25)-25=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-5)^2=25$$

Una vez obtenida la ecuación de la circunferencia, se puede extraer el radio y el centro:

$$r^2=25 \quad \Rightarrow \quad r=5$$
$$h=0 \qquad k=5$$

El radio es 5 y el centro está ubicado en (0,5).

Ejemplo 2

Dados los siguientes puntos, determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos y la ecuación de la recta perpendicular que pase por $P1$.

$$P1(6,2) \qquad P2(-1,1)$$

Primero se debe hallar la pendiente de la recta:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

Una vez hallada la pendiente, se reemplaza en la ecuación de una recta:

$$y=m(x-x_1)+y_1 \ \Rightarrow y=\frac{1}{3}(x+1)+1 \ \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

Para hallar la recta perpendicular, se debe encontrar una pendiente que cumpla:

$$m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

Se aplica una vez más la ecuación de la recta:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \ \Rightarrow y = 3(x - 6) + 2 \ \Rightarrow y = 3x - 16$$

Ejemplo 3

La fórmula de la gravedad escrita por Newton, describe la fuerza que ejerce un cuerpo con masa m_1 a otro con masa m_2 en función de la distancia r que lo separa así:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Basado en la anterior expresión, donde G es la constante gravitacional y las dos masas son iguales a 21 kg, determinar la fuerza que se ejerce entre las dos si están a una distancia de 4 m. ¿Es un modelo de variación directa o inversa?

Reemplazando los datos en la ecuación se tiene:

$$F = G\frac{(21)(21)}{4^2} = 27{,}5625G$$

Debido a que la masa es constante, se puede reescribir la fórmula de la siguiente manera:

$$F = \frac{k}{r^2} \qquad donde \quad k = Gm_1 m_2$$

El resultado anterior permite evidenciar que se cumple con los requisitos para ser un modelo de variación inversa.

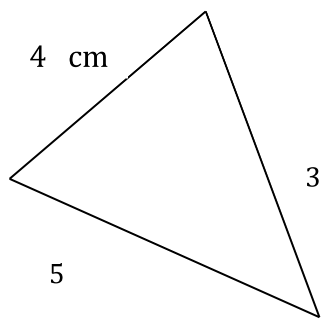
Ejemplo 4

Si 30 es a 4 como 5 es a x, ¿Cuál es el valor de x?

$\frac{30}{4} = \frac{5}{x}$	**Planteamiento de la proporción.**
$30x = (5)(4)$	**Propiedades de las proporciones.**
$x = \frac{20}{30}$	**Solución a la ecuación.**
$x = \frac{2}{3}$	**Simplificación**

Ejemplo 5

Determinar el área del siguiente triángulo:



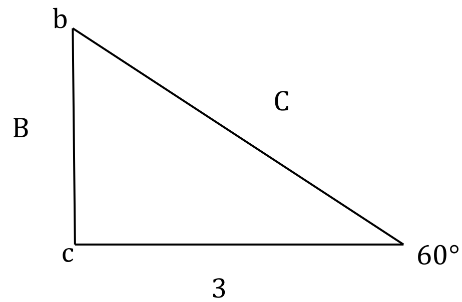
Se aplica el teorema de Herón, ya que no se conoce su altura:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad donde \;\; s = \frac{a+b+c}{2}$$
$$s = \frac{4\,cm + 3\,cm + 5\,cm}{2} = 6\,cm$$

$$A = \sqrt{6(6-4)(6-3)(6-5)} = \sqrt{6(2)(3)(1)} = 36\,cm^2$$

Ejemplo 6

Determinar el perímetro, área y el valor del ángulo faltante del siguiente triángulo rectángulo:



Para hallar el ángulo que hace falta se escribe la propiedad fundamental de los triángulos:

$$a + b + c = 180° \quad \Rightarrow \quad 60° + b + 90° = 180° \quad \Rightarrow \quad b = 30°$$

Para hallar los lados faltantes se aplica el teorema de Pitágoras y razones trigonométricas:

$$\tan 60° = \frac{B}{3} \quad \Rightarrow \quad B = 3\sqrt{3} \approx 5{,}196\ cm$$

Teorema de Pitágoras:

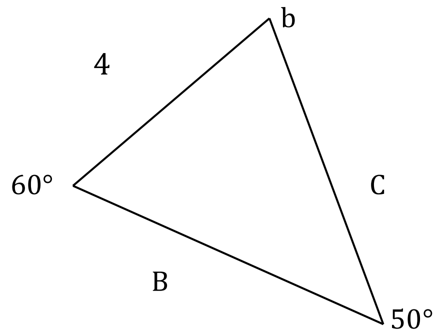
$$C^2 = A^2 + B^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{\left(3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2\right)} = \sqrt{9 + 27} = 6\ cm$$

$$Perimetro = A + B + C = 3\ cm + 5{,}196\ cm + 6cm = 14{,}196\ cm$$

$$Area = \frac{AB}{2} = \frac{(3)(5{,}196)}{2} = 7{,}794\ cm^2$$

Ejemplo 7

Determinar el ángulo y los lados faltantes para el siguiente triángulo



Primero se halla el ángulo que hace falta con la ley fundamental de los triángulos:

$$a + b + c = 180° \quad \Rightarrow \quad 60° + b + 50° = 180° \quad \Rightarrow \quad b = 70°$$

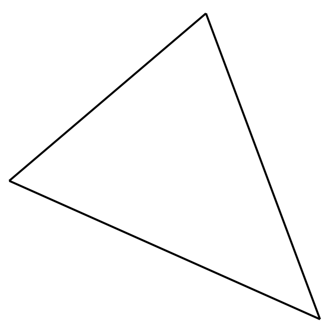
Debido a que se conocen dos ángulos y un lado, y no es un triángulo rectángulo, la mejor opción es aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{4}{sen\ 50°} = \frac{C}{sen\ 60°} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4(sen\ 60°)}{sen\ 50°} \approx 4{,}522\ cm$$

$$\frac{4}{sen\ 50°} = \frac{B}{sen\ 70°} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{4(sen\ 70°)}{sen\ 50°} \approx 4{,}907\ cm$$

Ejemplo 8

Determinar el lado B en el siguiente triángulo



Debido a que se conoce dos lados y el ángulo opuesto al lado desconocido, la mejor opción es aplicar la ley de los cosenos:

$$B^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5)\cos 60° = 41 - 20 = 21$$
$$B = \sqrt{21} \approx 4{,}582$$

Ejemplo 9

Determine el foco, la directriz y el vértice de la siguiente parábola:

$$8x^2 - 12y + 36 = 0$$

Primero se debe escribir la ecuación de la parábola en forma canónica:

$$8x^2 = 12y - 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{12}{8}(y - 3)$$

Comparando con la ecuación canónica $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, se pueden deducir las siguientes igualdades:

$$Vertice = (0,3) \qquad 4p = \frac{12}{8} \quad \Rightarrow p = \frac{3}{8}$$

Una vez hallada la distancia focal p, se tiene que la directriz es la siguiente recta:

$$Directriz\colon\ y = 3 - \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{21}{8}$$

Y el foco es el siguiente punto:

$$Foco\colon\ F\left(0\,, 3 + \frac{3}{8}\right) \qquad \Rightarrow \qquad F\left(0\,, \frac{27}{8}\right)$$

Ejemplo 10

Encontrar la ecuación de la elipse que cumple las siguientes condiciones:

$$Focos\ \ (\pm 4\,, 0), Vertices\ (\pm 5,0)$$

Como se conoce la ubicación de los focos, entonces se puede deducir que $c = 4$, que **los vértices son los puntos en donde el eje mayor se cruza con la elipse** y que $a = 5$. Para hallar b, se debe resolver la siguiente ecuación que es una propiedad de la elipse:

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 5^2 - 4^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{9} = 3$$

Una vez hallados los parámetros a, b, se reemplazan en la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ejemplo 11

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$4x - 3y = 11$$
$$8x + 4y = 12$$

Para aplicar el método de sustitución primero se despeja una incógnita de una ecuación

$$4x = 11 + 3y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11 + 3y}{4}$$

Una vez despejado una incógnita, se procede a sustituirla en 2.)

$$8\left(\frac{11 + 3y}{4}\right) + 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad 22 + 6y + 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad 10y = -10 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

Una vez hallada la solución a la primera incógnita, se reemplaza en la anterior ecuación para obtener el resultado de la segunda incógnita:

$$x = \frac{11 + 3(-1)}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

La solución es $x = 3 \;\; , \;\; y = -1$

Ejemplo 12

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación.

$$1.)\ x - 2y + 3z = 10$$
$$2.)\ \ 2x + 5y = 2$$
$$3.)\ y + 2z = 4$$

Lo primero que se debe hallar es un coeficiente que cuando multiplique a la ecuación 1.) se pueda eliminar una incógnita al sumarle la ecuación 2.)

$$(-2)(x - 2y + 3z) = 10(-2) \;\; \Rightarrow \; -2x + 4y - 6z = -20$$
$$-2x + 4y - 6z = -20$$
$$\underline{2x + 5y \qquad = \; 2}$$
$$9y - 6z = -18$$

Se hace lo mismo con la siguiente ecuación:

$$(3)(\ y + 2z) = 4(3) \ \ \Rightarrow \ 3y + 6z = 12$$

$$\begin{array}{c} 3y + 6z = 12 \\ \underline{9y - 6z = -18} \\ 12y = -6 \end{array}$$

Teniendo $y = -\frac{1}{2}$, se puede utilizar 3 para hallar z:

$$2z = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) \ \ \Rightarrow \ \ z = \frac{9}{4}$$

Teniendo $y = -1$, se puede utilizar 2 para hallar x:

$$2x = 2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) \ \ \Rightarrow \ \ x = \frac{9}{4}$$

La solución es $x = \frac{9}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{9}{4}$

Resumen

En esta tercera unidad se realizó un repaso del plano cartesiano, cómo se expresan sus coordenadas y cómo graficar en él. Así mismo, se analizaron las propiedades de la recta, su pendiente y cómo se aplica en problemas cotidianos.

Se tuvo un acercamiento a los teoremas principales de la geometría euclidiana como el de Pitágoras, Herón y el de Thales. Así mismo, se mostraron el tipo de líneas y ángulos que se encuentran en la geometría y se analizaron las curvas cónicas: parábola, elipse, circunferencia e hipérbola.

Adicionalmente, se hizo una introducción a la trigonometría como estudio del triángulo y se abordaron las razones trigonométricas y las leyes del seno y el coseno. Se repasó áreas y volúmenes de los polígonos y sólidos más importantes y por último se abordó el cómo solucionar un sistema de ecuaciones por los tres métodos: igualación, sustitución y eliminación.

Bibliografía

- STEWART, J. (2008). Pre cálculo. 5ª. Edición. Thompson Editores.
- SWOKOWSKI, E. (1998). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Tomson Editores. 9ª Edición. México,.
- URIBE CALAD, JA. (1986).Julio Alberto. Matemáticas básicas y operativas. Susaeta ediciones & cia. ltda.

Referencias de internet

- http://matematicabas.wordpress.com/geometria-analitica/
- http://www.amolasmates.es/cuarto_eso/apuntes/trigonometria.pdf
- http://www.educared.org/wikiEducared/M%C3%A9todos_de_resoluci%C3%B3n_de_sistemas_de_ecuaciones_lineales.html