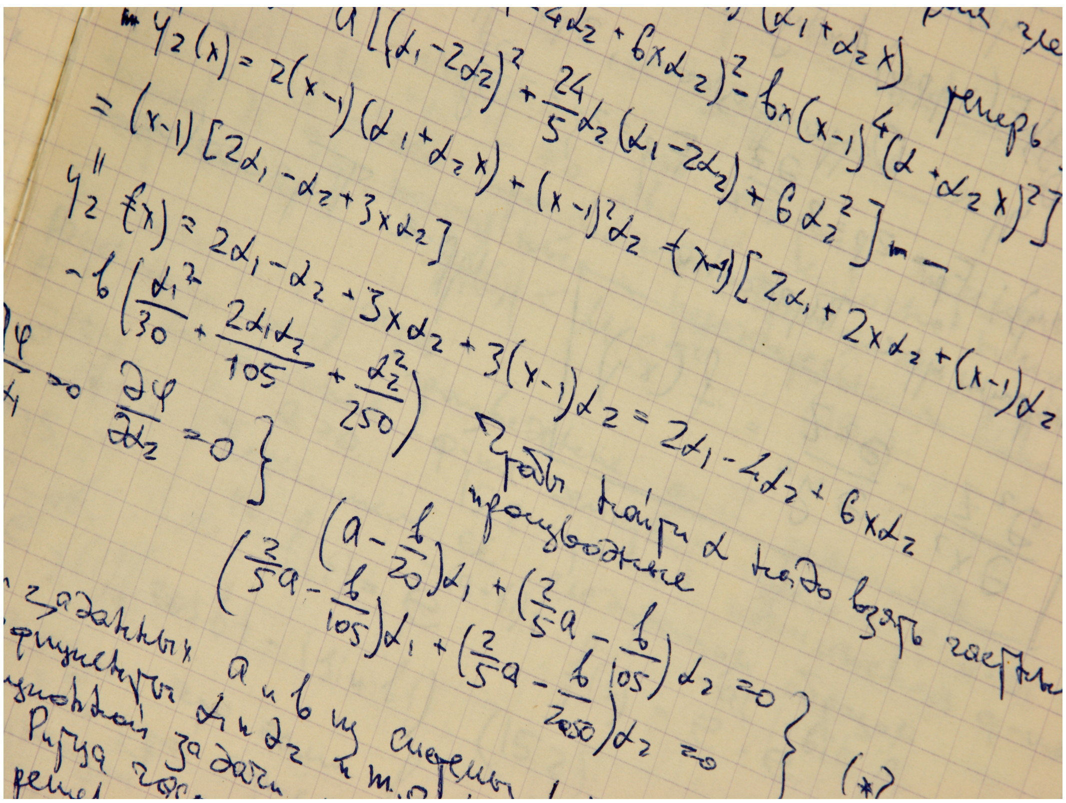
UNIDAD 2. OPERACIONES ALGEBRAICAS, ECUACIONES E INECUACIONES



Los números reales son el conjunto de números naturales, cardinales, enteros racionales e irracionales.

Tabla de contenido

Introducción

Al tener conceptualizados y aprendidos las axiomas de los números reales, ahora se aplicarán en las expresiones algebraicas para así poder factorizar, racionalizar y resolver ecuaciones tanto lineales como de segundo orden o cuadráticas.

Mediante ejemplos de aplicación se hará el modelado de una ecuación y se resolverán desigualdades.

Objetivos

Objetivo general

Operar adecuadamente los casos de factorización, ecuaciones e inecuaciones mediante ejercicios propuestos en clase.

Objetivos específicos

- Aplicar correctamente los casos de factorización, las fracciones algebraicas y su racionalización.
- Modelar y resolver una ecuación lineal o cuadrática.
- Interpretar y hallar la solución de una desigualdad

2.1 Factorización

Factorizar un polinomio es obtener varios polinomios de menor grado y que su producto sea equivalente al polinomio original. Esto se observa en el siguiente ejemplo:

$$p^2 + pq = p(p+q)$$

Se puede deducir entonces que el polinomio original es $p^2 + pq$ y su respectiva descomposición en polinomios es $p(p+q)$, donde p y (p+q) son polinomios diferentes. Para aplicar la factorización existen casos bien definidos; estos se mencionan a continuación.

Caso 1. Factor común

El factor común de un polinomio, es otro polinomio que tiene como principal característica que es el máximo común divisor de los términos que componen el polinomio original.

Ejemplo:

Para factorizar el siguiente polinomio:

$$15p^3q^2 + 25pq^3 + 5p^2q.$$

a.) Primero se busca el máximo común divisor entre los coeficientes numéricos de cada término del polinomio, en este caso es 5.

b.) Segundo se busca el polinomio que es común en los tres términos. Esto se puede determinar, observando las letras que son comunes y que tengan el menor grado posible en el polinomio; en este caso se tiene que son pq.

c.) Luego de obtener el factor común tanto numérico como literal, se agrupan estos dos lo que finalmente da como factor común $5pq$.

d.) Para determinar el otro factor se divide todo el polinomio original entre el factor común:

$$\frac{15p^3q^2 + 25pq^3 + 5p^2q}{5pq} = 3p^2q + 5q^2 + p$$

e.) Finalmente se obtiene el resultado que es el producto de los dos polinomios hallados, así:

$$5pq(3p^2q + 5q^2 + p).$$

Caso 2. Trinomio cuadrado perfecto $p^2 \pm 2pq + q^2$

En este caso se aplica el Producto Notable 1- PN1, que es el cuadrado de una suma, en donde el primer y último término del trinomio son los cuadrados perfectos y el término central es el doble del producto de las raíces de los cuadrados perfectos.

El signo de la suma está dado por el signo del término central y los sumandos son las raíces del primer y el último término.

Ejemplo:

Al factorizar el siguiente polinomio:

$$64a^2 - 64ab + 16b^2$$

a.) Primero se verifica que sea un trinomio cuadrado perfecto. $\sqrt{64a^2} = 8a$ y $\sqrt{16b^2} = 4b$, por lo que el termino del medio debería ser $2(8a)(4b) = 64ab$, en donde efectivamente lo es, por ende si es un trinomio cuadrado perfecto.

b.) Se factoriza teniendo en cuenta el signo del término de la mitad, por ende el resultado es:

$$(8a - 4b)^2$$

Caso 3. Diferencia de cuadrados $p^2 - q^2$

En este caso se aplica el PN6, en donde se observa que la factorización de una diferencia de cuadrados está dada por el producto de la suma y la resta de la raíz cuadrada de las variables implicadas en la diferencia de cuadrados.

Ejemplo:

Al factorizar el siguiente polinomio:

$$225s^4 - 25t^2$$

a.) Primero se determinan las raíces cuadradas de los términos que se ven involucrados en la diferencia de cuadrados. $\sqrt{225s^4} = 15s^2$ y $\sqrt{25t^2} = 5t$, con esto se verifica que sean cuadrados perfectos y se pueda aplicar el caso de factorización.

b.) Ya obtenidas las raíces, se pasa a factorizar. Se tiene como resultado:

$$(15s^2 - 5t)(15s^2 + 5t).$$

Caso 4. Trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

En este caso se aplica el PN7, donde se observa que la factorización para este tipo de trinomios es de la forma $(x + p)(x + q)$, donde $c = p * q$ y $b = p + q$.

Ejemplo. Al factorizar el siguiente polinomio:

$$a^2 - 12a + 35$$

- Como se mencionó anteriormente, se busca un par de números p y q que cumplan con $p * q = 35$ y $p + q = -12$. Estos números por simple inspección son $p = -5\ y\ q = -7$.
- Una vez obtenidos los números que cumplan la condición dada, se realiza la factorización como se mencionó.
- El resultado es:
- $(a - 5)(a - 7)$

Caso 5. Trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$

En este caso se aplica el PN8, donde se observa que la factorización para este tipo de trinomios es de la forma $(sx + p)(tx + q)$, en donde se debe buscar la forma de que el polinomio llegue a ser un trinomio de la forma $y^{2n} + dy^n + e$ y factorizar como el caso anterior.

Ejemplo. Al factorizar el siguiente polinomio:

$$2b^2 - 2b - 12$$

a.) Primero se busca la forma de que el polinomio tenga la forma $y^{2n} + dy^n + e$, para esto se multiplica y divide por el coeficiente del literal de mayor orden, que en este caso es 2.

Entonces se tiene:

$$\frac{2(2b^2 - 2b - 12)}{2} = \frac{(2b)^2 - 2(2b) - 24}{2}$$

b.) El numerador está en la forma buscada si se hace la siguiente conversión: $y = 2b$, $d = -2$ y $e = -24$. Con estos datos, al igual que el caso anterior, se busca un par de número que cumplan con las siguientes condiciones: con $p * q = -24$ y $p + q = -2$. Estos números por simple inspección son $p = -6$ y $q = 4$.

c.) Finalmente, la factorización es la siguiente:

$$\frac{(2b - 6)(2b + 4)}{2} = \frac{2(b - 3)(2b + 4)}{2} = (b - 3)(2b + 4)$$

Caso 6. Factorización de trinomios por complementación

Este caso imita al del trinomio cuadrado perfecto, con una diferencia en que el trinomio cuadrado no se encuentra completo. Para esto se debe agregar un término que lo complete verificando que la expresión del trinomio no se modifique.

Ejemplo. Al factorizar el siguiente polinomio:

$$225p^2 + 120p - 9$$

a.) Se desea llegar a un trinomio de la forma $a^2 + 2ab + b^2$. En este caso se llegan a las siguientes igualdades:

$$a = \sqrt{225p^2} = 15p \quad y \quad 2ab = 120p \quad \Rightarrow \quad b = \frac{120p}{30p} = 4$$

b.) Con el nuevo término se completa el trinomio cuadrado perfecto así:

$$(225p^2 + 120p + 16) - 16 - 9$$

c.) Luego se factoriza utilizando los casos vistos anteriormente: trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados:

$$(15p + 4)^2 - 25 = (15p + 4 - 5)(15p + 4 + 5) =$$
$$(15p - 1)(15p + 9)$$

Caso 7. Sumas y restas de cubos $p^3 \pm q^3$:

La factorización para este caso siempre está dada por la multiplicación de un binomio y un trinomio y el signo de los términos dependerán de si es una suma o una resta. En general se tiene $p^3 \pm q^3 = (p \pm q)(p^2 \mp pq + q^2)$.

Ejemplo. Al factorizar el siguiente polinomio: $81x^9 + 125$

Aplicando la factorización para una suma de cubos se tiene:

$$27x^9 + 125 = (3x^3 + 5)(9x^6 - 15x^3 + 25)$$

Análogamente, aplicando la factorización para una resta de cubos se tiene:

$$27x^9 - 125 = (3x^3 - 5)(9x^6 + 15x^3 + 25)$$

Caso 8. Factorización por agrupación

Cuando se tienen polinomios y no se puede aplicar ningún caso anterior directamente, se busca agrupar términos que permitan aplicar cualquiera de los casos de factorización.

Ejemplo. Al factorizar el siguiente polinomio: $9xy - 4x + 9yz - 4z$

Se deben agrupar los dos primeros términos y los dos últimos para poder factorizar por medio de factor común:

$$\begin{aligned} 9xy - 4x + 9yz - 4z &= (9xy - 4x) + (9yz - 4z) \\ &= x(9y - 4) + z(9y - 4) \\ &= (9y - 4)(x + z) \end{aligned}$$

2.2. Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es un cociente entre dos expresiones algebraicas (polinomios). Estas fracciones pueden ser simples o compuestas y poseen operaciones entre ellas como lo son la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Fracción algebraica simple

Es aquella fracción que no posee una fracción algebraica ni en el numerador ni el denominador. Sus operaciones están definidas de la siguiente manera:

Suma y Resta: al igual que en los números racionales para realizar una suma o una resta de fraccionarios, se debe encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores y realizar la respectiva multiplicación y posteriormente suma o resta en los numeradores para obtener así el resultado.

Ejemplo:
Al realizar la siguiente operación:

$$\frac{x-3}{(x+5)^3}+\frac{x+6}{(x+5)^2}-\frac{x-8}{x+5}$$

Se busca el mínimo común múltiplo entre los denominadores de cada fracción, en este caso es $(x+5)^3$; entonces la operación con las respectivas multiplicaciones y da como resultado:

$$\frac{x-3+(x+6)(x+5)-(x-8)(x+5)^2}{(x+5)^3}$$

$$=\frac{x-3+x^2+11x+30-(x-8)(x^2+10x+25)}{(x+5)^3}$$

$$=\frac{x^2+12x+27-(x^3+2x^2-55x-200)}{(x+5)^3}$$

$$=\frac{-x^3-x^2+67x+227}{(x+5)^3}$$

Multiplicación y división: como en los números racionales la multiplicación de fracciones se realiza multiplicando los numeradores entre sí y lo mismo con los denominadores. Para la división se invierte cualquiera de las dos fracciones que se ven afectadas por la división y se realiza la multiplicación normalmente.

Ejemplo:
Al realizar la siguiente operación:

$$\frac{y+10}{y-4}\cdot\frac{y}{y+2}\div\frac{y+3}{y-4}$$

Para la multiplicación se realiza la operación directamente y posteriormente para la división se invierte una de las fracciones y se realiza la multiplicación directamente.

$$= \frac{(y+10)y}{(y-4)(y+2)} \cdot \frac{y-4}{y+3} = \frac{y^2+10y}{y^2-2y-8} \cdot \frac{y-4}{y+3}$$

$$= \frac{(y^2+10y)(y-4)}{(y^2-2y-8)(y+3)} = \frac{y^3+6y^2-40y}{y^3+y^2-14y-24}$$

Simplificación: Para simplificar una fracción algebraica se deben aplicar los casos de factorización que se puedan, tanto en el numerador como el denominador, para encontrar factores iguales y poder simplificarlos; así se encontrará la fracción que no tenga un factor igual en el numerador y en el denominador.

Ejemplo:
Al simplificar la siguiente fracción:

$$\frac{p^2+8p+15}{p^3+125}$$

Aplicando el caso 4 de la factorización, el numerador se factoriza de la siguiente manera:

$$p^2+8p+15 = (p+5)(p+3)$$

También, aplicando el caso 7 de la factorización, el denominador se factoriza de la siguiente manera:

$$p^3+125 = (p+5)(p^2-5p+25)$$

Entonces la fracción simplificada sería:

$$\frac{(p+5)(p+3)}{(p+5)(p^2-5p+25)} = \frac{p+3}{p^2-5p+25}$$

Fracción algebraica compuesta

Es aquella que posee en su numerador o denominador una fracción algebraica. Mediante simplificación y el producto de medios y extremos, una fracción algebraica compuesta se puede convertir en una simple equivalente.

Ejemplo. Al convertir la siguiente fracción compuesta a una simple:

$$\frac{\frac{1}{x-4}+7x-2}{2x^2+\frac{3}{x-2}}$$

Primero se realizan operaciones entre fraccionarios tanto en el numerador como en el denominador para obtener una fracción en ambos:

$$\frac{\frac{1+(x-4)(7x-2)}{x-4}}{\frac{2x^2(x-2)+3}{x-2}}=\frac{\frac{7x^2-30x+9}{x-4}}{\frac{2x^3-4x^2+3}{x-2}}$$

Una vez se tiene una fracción en el numerador y en el denominador, se realiza producto de extremos y producto de medios para obtener la fracción simple:

$$\frac{\frac{7x^2-30x+9}{x-4}}{\frac{2x^3-4x^2+3}{x-2}}=\frac{(x-2)(7x^2-30x+9)}{(x-4)(2x^3-4x^2+3)}$$

$$=\frac{7x^3-44x^2-69x-18}{2x^4-12x^3+16x^2+3x-12}$$

2.3. Racionalización

La **racionalización** es una forma de simplificación de fracciones algebraicas en donde se eliminan los números irracionales (radicales) del denominador. A continuación se consideran los siguientes casos que son los más comunes en fracciones algebraicas.

Denominadores con una raíz cuadrada

Se multiplica tanto en el numerador como en el denominador por la misma raíz cuadrada que está en el denominador.

Ejemplo. Al racionalizar la siguiente fracción:

$$\frac{4x+5}{\sqrt{x-1}}$$

Se multiplica tanto el numerador como el denominador por la raíz que se encuentra en el denominador y se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{(4x+5)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-1}} = \frac{(4x+5)\sqrt{x-1}}{x-1}$$

Denominadores con una raíz n-ésima

Se multiplica tanto en el numerador como en el denominador por una raíz n-ésima, que permita que se elimine la raíz en el denominador.

Ejemplo. Al racionalizar la siguiente fracción:

$$\frac{5b+7}{\sqrt[5]{(4b-6)^2}}$$

Se multiplica tanto el numerador como el denominador por una raíz quinta que permita eliminar la raíz del denominador. Para esto, se aprovechan las propiedades de los radicales y se resuelve de la siguiente manera:

$$\frac{(5b+7)\sqrt[5]{(4b-6)^3}}{\sqrt[5]{(4b-6)^2}\,\sqrt[5]{(4b-6)^3}} = \frac{(5b+7)\sqrt[5]{(4b-6)^3}}{\sqrt[5]{(4b-6)^5}}$$

$$= \frac{(5b+7)\sqrt[5]{(4b-6)^3}}{4b-6}$$

Denominadores con dos raíces cuadradas sumándose o restándose

En este caso, se multiplica tanto el numerador como el denominador por las mismas dos raíces sumándose o restándose, pero con la operación inversa para obtener una diferencia de cuadrados y eliminar las raíces del denominador.

Ejemplo. Al racionalizar la siguiente fracción:

$$\frac{3y^2+4x^2}{\sqrt{y-4}+\sqrt{x+5}}$$

En este caso se buscará la manera de que el denominador quede expresado como una diferencia de cuadrados para poder eliminar las raíces, en este caso se multiplica por la resta de las dos raíces que se encuentran en el denominador, y se tiene el siguiente resultado:

$$\frac{(3y^2+4x^2)\left(\sqrt{y-4}-\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{y-4}+\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{y-4}-\sqrt{x+5}\right)}$$

$$=\frac{(3y^2+4x^2)\left(\sqrt{y-4}-\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{y-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+5}\right)^2}$$

$$=\frac{(3y^2+4x^2)\left(\sqrt{y-4}-\sqrt{x+5}\right)}{(y-4)-(x+5)}$$

$$=\frac{(3y^2+4x^2)\left(\sqrt{y-4}-\sqrt{x+5}\right)}{y-x-9}$$

Denominadores con dos raíces cúbicas sumándose o restándose:

Igual al caso anterior, se multiplica; esta vez, por una suma o restas de raíces cúbicas para completar una suma o diferencia de cubos y así eliminar las raíces cúbicas del denominador.

Ejemplo Al racionalizar la siguiente fracción:

$$\frac{4a+5b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$$

En este caso se buscará complementar el denominador para poder factorizar a una suma de cubos y así eliminar los radicales que se encuentran en el denominador. Este ejercicio se resuelve de la siguiente manera:

$$\frac{(4a+5b)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)}$$

$$=\frac{(4a+5b)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{ab}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}$$

$$=\frac{(4a+5b)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{ab}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)}{a+b}$$

2.4 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Los literales de estas expresiones algebraicas son denominados **variables.** Para la solución de ecuaciones se debe tener en cuenta la propiedad de uniformidad de la igualdad; así:

- $A=B\ \Rightarrow A+c=B+c$. Si se suma el mismo número en ambos lados, la igualdad se sigue manteniendo.

- $A=B\ \Rightarrow cA=cB$. Si se multiplica el mismo número a ambos lados y este es diferente de cero, la igualdad se sigue manteniendo.

Aunque hay varios tipos de ecuaciones, comúnmente se encuentran las siguientes.

Ecuaciones lineales

Son aquellas ecuaciones en donde sus variables son de orden uno, es decir ninguna de ellas puede poseer un exponente diferente de uno.

Ejemplo:

$$5x+6=2x-4.$$

La solución a estas ecuaciones es sencilla, ya que solo se necesita aplicar las propiedades de la igualdad expuestas anteriormente. Por ejemplo, para hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$3b - 4 = 5b + 9$$

El primer paso es intentar que en un lado de la igualdad estén los literales y al otro lado los números, para esto aplicamos las propiedades de la igualdad así:

$$3b - 4 - (3b) = 5b + 9 - (3b)$$
$$-4 - (9) = 2b + 9 - (9)$$
$$-13\left(\frac{1}{2}\right) = 2b\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$b = -\frac{13}{2}$$

Ecuaciones cuadráticas

Son aquellas ecuaciones en donde una o más de las variables que la componen tienen grado dos; es decir su exponente es igual a dos.

Ejemplo:

$$y^2 + 5y - 4 = 0.$$

Este tipo de ecuaciones siempre tendrá dos soluciones. Las soluciones para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se puede llegar a esta fórmula por medio de las propiedades de las igualdades y con un caso de factorización específico (Trinomio cuadrado perfecto). Debido a que existe una raíz se podrían dar respuestas complejas, irracionales o racionales, esto depende de los coeficientes que tenga la ecuación.

Por ejemplo, para hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$5x^2 - 8x = 4x + 15$$

Se debe aplicar la fórmula que se expuso anteriormente. Para ello, se debe llegar a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y por esto se usan las propiedades de la igualdad y se obtiene:

$$5x^2 - 8x - (4x + 15) = 4x + 15 - (4x - 15)$$
$$5x^2 - 12x - 15 = 0$$

Ahora, si se aplica la fórmula reemplazando los valores de la siguiente manera: $a = 5$, $b = -12$, $c = -15$ al resolver se tiene:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(5)(-15)}}{2(5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 300}}{10} = \frac{12 \pm \sqrt{444}}{10}$$

Finalmente las dos respuestas de la ecuación son dos números irracionales que son los siguientes:

$$x_1 = \frac{12 + \sqrt{444}}{10}, x_2 = \frac{12 - \sqrt{444}}{10}$$

2.4.1 Ecuaciones de orden superior

Las **ecuaciones de orden superior** son aquellas en donde una o más de sus variables tienen orden mayor a dos. Para resolver estas ecuaciones se aplican las propiedades de la radicación y la potenciación que permiten eliminar las raíces que se encuentran en la ecuación.

Ejemplo:

$$5x^3 + 100 = -25 - 3x^3$$

Para resolver esta ecuación, al igual que las anteriores, se dejan los literales en un lado de la igualdad y los números en el otro lado. Esto se hace con propiedades de la igualdad de la siguiente manera:

$$5x^3 + 100 + (3x^3 - 100) = -25 - 3x^3 + (3x^3 - 100)$$
$$8x^3 = -125$$

En este caso la mejor forma de resolver la ecuación es aplicar la raíz cúbica a ambos lados de la igualdad. De esta manera el exponente cúbico de la variable se eliminará y bastará solo con aplicar propiedades de la igualdad para resolver:

$$\sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{-125}$$

$$2x = -5 \;\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Según en la manera en cómo se resuelven, estas ecuaciones se pueden agrupar en fracciones y radicales.

Fracciones

Estas ecuaciones se caracterizan por tener fracciones algebraicas en algún lado de la igualdad. Para resolverlas se utilizan las propiedades de la igualdad, teniendo en cuenta que los denominadores no pueden tomar el valor de cero, ya que la división por cero no se puede realizar.

Ejemplo: $\frac{5x-1}{x+5} = 25$

De la anterior ecuación, es importante tener en cuenta que el valor de x no puede ser -5, ya que la división entre cero no es posible. Una vez aclarado esto se procede a aplicar las propiedades de la igualdad para dejar a los literales a un lado de la igualdad y los números al otro:

$$(x+5)\frac{5x-15}{x+5} = 25(x+5)$$

$$5x - 15 = 25x + 125$$

$$-140 = 20x \;\Rightarrow x = -7$$

Radicales

Estas ecuaciones se caracterizan porque alguna expresión algebraica tiene exponente fraccionario. Para resolver este tipo de ecuaciones se usan las propiedades de la potenciación, que permiten eliminar las raíces y seguir resolviéndola como se ha mencionado anteriormente.

Ejemplo:

$$\sqrt{5x - \frac{x}{2}} = 7$$

Para resolver esta ecuación, se aplican las propiedades de la potenciación, y para eliminar la raíz cuadrada se debe elevar cada lado de la igualdad al cuadrado; luego, se resuelve con las propiedades de la igualdad:

$$\left(\sqrt{5x-\frac{x}{2}}\right)^2 = 7^2 \;\Rightarrow 5x-\frac{x}{2} = 49$$

$$\frac{9x}{2} = 49 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{98}{9}$$

2.5 División sintética

La **división sintética** es una forma de dividir un polinomio entre un binomio de la forma **x-a** donde a es un número entero. Ésta se usa para demostrar si un binomio es múltiplo de un polinomio específico. La división sintética cumple las siguientes reglas para obtener el cociente y el residuo de la división:

- El cociente siempre será un polinomio de un grado menor que el polinomio original.

- El coeficiente del término de mayor grado del polinomio original será el coeficiente del término de mayor grado del cociente.

- El coeficiente de un término cualquiera del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el término independiente del binomio divisor con el signo cambiado. A este producto se le suma al coeficiente del polinomio original que está en la misma posición respecto al cociente.

- Para obtener el residuo de la división se multiplica el último coeficiente del cociente y se multiplica por el término independiente del binomio divisor con el signo cambiado y este producto se le suma al término independiente del polinomio original.

Veamos los siguientes ejemplos:

1) Dividir

$$x^3+5x^2-3x+2 \text{ entre } x-3$$

Primero se organizan los coeficientes de izquierda a derecha, de mayor a menor orden del literal que los acompaña, y por último se pone el término independiente con signo cambiado del binomio divisor:

1	5	-3	2	+3
	1x3=3	8x3=24	21x3=63	
1	8	21	65	

Luego de hacer la división, el resultado está en la parte inferior, organizado de mayor a menor grado, y el último número es el residuo de la división. Entonces, el resultado de la división es:

$x^2 + 8x + 21$ con residuo de 65.

Puesto que el residuo es diferente de cero, se deduce que x-3 no es múltiplo del polinomio en el dividendo.

2) Dividir

$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6$ entre $x + 3$

1	2	-2	1	-6	-3
	1x (-3)=-3	(-1)(-3)=3	1x(-3)=-3	(-2)(-3)=6 .	
1	-1	1	-2	0	

La respuesta de la anterior división es la siguiente:

$x^3 - x^2 + x - 2$ y el residuo es cero (0).

Lo que quiere decir que $x + 3$ es múltiplo de $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6$.

2.6 Aplicación y modelado mediante ecuaciones

Existen situaciones en la vida real en donde se pueden aplicar las ecuaciones. Esto se logra mediante un modelado correcto de la situación expuesta, ya que si no se modela correctamente, la solución a la ecuación no será la correcta para resolver el problema dado. Un problema típico para la aplicación de ecuaciones es el siguiente:

La suma de dos números es 100 y el doble del mayor equivale al triple del menor. Hallar los números.

Para resolver este tipo de problemas se efectúan los siguientes pasos:

- Identificar las incógnitas de la ecuación.
- Establecer relación entre las incógnitas.
- Establecer la ecuación
- Resolver la ecuación.
- Comprobar y dar respuesta.

Una vez resuelta la ecuación se da la respuesta al problema; para el ejemplo planteado, se tiene:

a) Identificar las incógnitas de la ecuación:

$$x = \text{Número Mayor}$$
$$y = \text{Número menor}$$

b) Establecer relación entre las incógnitas:

$$y = \frac{2x}{3}$$
$$x + y = 100$$

c) Establecer la ecuación:

$$x + \frac{2x}{3} = 100$$

d) Resolver la ecuación y dar la respuesta:

$$\frac{3x + 2x}{3} = 100 \quad \Rightarrow \quad 5x = 300 \quad \Rightarrow \quad x = 60$$
$$y = \frac{2(60)}{3} = 40$$

e) Comprobar y dar respuesta**:** se verifica en las ecuaciones que las respuestas halladas sean correctas:

$$60 + 40 = 100 \ \text{ Correcto}$$

$$\frac{2(60)}{3} = 40 \quad \text{Correcto}$$

2.7 Desigualdades

Una **desigualdad** es una sentencia en donde una expresión puede ser menor (<), mayor (>), menor o igual (≤) o mayor o igual (≥) a otra expresión. Cuando las expresiones son algebraicas son conocidas como **inecuaciones**, ya que, a diferencia de las ecuaciones, no se posee una igualdad sino una desigualdad. La característica principal de las inecuaciones o desigualdades es que la solución no es un número sino un intervalo o una unión de estos sobre la recta real. Al igual que las ecuaciones, las inecuaciones poseen propiedades para ser resueltas de una manera sencilla y rápida.

Éstas son:

- $A < B \;\; \Rightarrow \;\; A \pm C < B \pm C$. Al sumar o restar una cantidad igual a cada lado de la desigualdad, ésta se mantiene.
- $A < B \;\; \Rightarrow \;\; cA < cB$ si y solo si $c > 0$. Al multiplicar una cantidad igual a cada lado de la desigualdad y ésta es mayor que cero, la desigualdad se mantiene.
- $A < B \;\; \Rightarrow \;\; cA > cB$ si y solo si $c < 0$. Al multiplicar una cantidad igual a cada lado de la desigualdad y esta es menor que cero, la desigualdad cambia de sentido.

Tipos de desigualdades

Desigualdades lineales

Al igual que las ecuaciones lineales, estas se caracterizan porque sus variables son de grado uno, y se resuelven siguiendo las propiedades de desigualdades expuestas anteriormente.

Ejemplo:
Resolver la siguiente desigualdad:

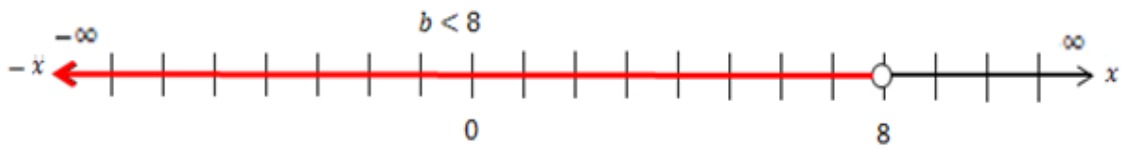
$$5b + 7 > 6b - 1$$

Al aplicar las propiedades de las desigualdades, la solución a esta desigualdad es la siguiente:

$$5b + 7 - (6b - 7) > 6b - 1 - (6b - 7)$$
$$-b(-1) > -8(-1)$$
$$b < 8$$

La solución a esta desigualdad es el intervalo abierto $(-\infty, 8)$, que quiere decir que todos los números reales que son menores estrictamente de 8 satisfacen la desigualdad y son la solución a esta desigualdad.

En la gráfica 1, se puede ver el intervalo sobre la recta real.



Gráfica 2.1. Intervalo sobre la recta real.

Desigualdades cuadráticas

Se caracterizan porque alguna de sus variables es de segundo orden y, como en las ecuaciones cuadráticas, la idea en este caso es “desigualar” a cero para poder obtener un polinomio de orden dos y así poder factorizar en dos factores.

Posteriormente, se encuentran los valores de las fronteras para que los factores cambien de signo. Para cada uno de estos intervalos se evalúan los siguientes casos:

- Si ambos factores son negativos o positivos, entonces el resultado es positivo.

- Si alguno de los factores es negativo y el otro positivo, entonces el resultado es negativo.

Una vez hallado de los intervalos que dan respuestas negativas o positivas, se verifica la dirección de la desigualdad y así mismo se da como respuesta el intervalo que cumple la desigualdad.

Ejemplo:
Resolver la siguiente desigualdad:

$$x^2 - 4x + 10 < x + 4$$

Lo primero que se debe hacer es “desigualar” a cero. Es decir, a un lado de la igualdad debe estar el cero y al otro lado una expresión algebraica. Esto se hace con las propiedades de la desigualdad así:

$$x^2 - 4x + 10 - (x + 4) < x + 4 - (x + 4)$$
$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Después, se pasa a factorizar la expresión algebraica; para ello, se aplica el caso de factorización número cuatro. Entonces la expresión factorizada es la siguiente:

$$(x-3)(x-2)<0$$

Como indica la expresión anterior, hay que hallar un valor de x, para el cual la expresión $(x-3)(x-2)$ sea negativa. Para ello, se realizan los siguientes pasos:

- Se hallan los valores de x, para los cuales la expresión es igual a cero: al ser una ecuación cuadrática se tienen dos resultados, en este caso es $x=3 \;\; o \;\; x=2$.

- Se hallan intervalos posibles de solución y se evalúan: en este caso se divide la recta real en 3 intervalos posibles de solución que son los siguientes: $(-\infty,2)$, $(2{,}3)$, $(3,\infty)$.

Para estos tres intervalos, se evalúa el signo de cada factor y así mismo el signo final de la expresión:

- **Intervalo $(-\infty,\mathbf{2})$:** en este intervalo ambos factores $(x-3)(x-2)$ son negativos. Es decir, la expresión será un producto de dos números negativos por lo que la respuesta será un número positivo siempre. Entonces este intervalo no es una solución a la desigualdad.

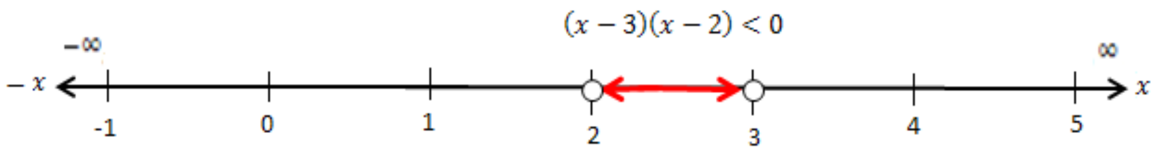
- **Intervalo $(\mathbf{2},\mathbf{3})$:** en este intervalo el factor $(x-2)$ es positivo, mientras $(x-3)$ es negativo. Entonces la expresión será una multiplicación de un número negativo y uno positivo, el resultado final será un número negativo y es justo lo que se necesita. Entonces el intervalo $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ hace parte de la respuesta.

- **Intervalo $(\mathbf{3},\infty)$:** en este intervalo ambos factores poseen valores positivos, por lo que el signo de la expresión será positivo. Así se puede concluir que este intervalo no debe hacer parte de la respuesta.

Se evalúan las fronteras: se evalúan si las fronteras cumplen la desigualdad. En este caso x=2 y x=3 no lo cumplen, ya que con estos valores la expresión vale cero y el signo de la desigualdad es estrictamente menor, por lo que estos números no entran en la solución.

Respuesta final: el único intervalo que cumple con la desigualdad es (2,3), siendo este un intervalo abierto, ya que 2 y 3 no entra en la solución. Entonces la respuesta es todo número comprendido entre 2 y 3, excluyendo el 2 y el 3 cumplen con la desigualdad dada.

En la siguiente gráfica se muestra el intervalo sobre la recta real.



Gráfica 2.2. Intervalo sobre la recta real

Desigualdades con valor absoluto

Cuando se presenta una desigualdad con un valor absoluto, ésta se debe tratar diferente ya que se debe tener en cuenta la definición matemática del **valor absoluto**. La definición matemática del **valor absoluto**, es la siguiente:

$$|x| = x \; si \; x \geq 0 \quad y$$
$$|x| = -x \; si \; x < 0$$

Teniendo en cuenta esta definición, una desigualdad que tienen un valor absoluto, se evalúa de la siguiente manera:

- $|x| > a \quad \Rightarrow x < -a \;\; y \;\; x > a$
- $|x| < a \quad \Rightarrow x > -a \;\; y \;\; x < a \;\; ó \;\; -a < x < a$

En estos casos se deben evaluar dos desigualdades lineales y la respuesta a la inecuación sería la unión de las respuestas que tengan en ambas desigualdades.

Ejemplo 3. Resolver la siguiente desigualdad:

$$|5x-2| - 2x \leq 2x + 3$$

Primero se deja a un lado de la desigualdad el valor absoluto y al otro lado lo que no tenga valor absoluto. Esto se hace aplicando reglas de las desigualdades:

$$|5x-2| - 2x + (2x) \leq 2x + 3 + (2x)$$
$$|5x-2| \leq 4x + 3$$

Una vez organizada la desigualdad, se evalúa el valor absoluto obteniendo así las dos desigualdades y se proceden a resolverlas:

$$5x - 2 \geq -(4x+3)$$

Se resuelve:

$$5x - 2 + (4x + 2) \geq -4x - 3 + (4x + 2)$$
$$9x\left(\frac{1}{9}\right) \geq -1\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$x \geq -\frac{1}{9}$$

$5x - 2 \leq 4x + 3$

Se resuelve:

$$5x - 2 + (-4x + 2) \leq 4x + 3 + (-4x + 2)$$
$$x \leq 5$$

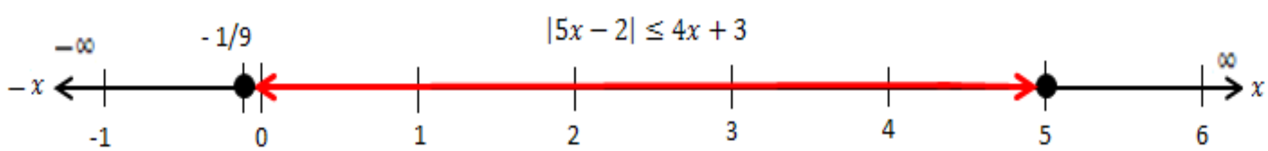
Una vez resuelta las dos desigualdades, se obtiene como respuesta final la unión de los dos intervalos obtenidos. En este caso, son los números mayores a menos un noveno y los menores a cinco en un intervalo cerrado; es decir, se incluye menos un noveno y el cinco; así:

$$-\frac{1}{9} \leq x \leq 5$$

El intervalo se expresa de la siguiente manera:

$$\left[-\frac{1}{9}, 5\right]$$

En la siguiente gráfica se muestra el intervalo sobre la recta real.



Gráfica 2.3. Intervalo sobre la recta real.

Ejemplo.
Resolver la siguiente desigualdad:

$$|5x - 2| - 2x \geq 2x + 3$$

Primero se deja a un lado de la desigualdad el valor absoluto y al otro lado lo que no tenga valor absoluto. Esto se hace aplicando reglas de las desigualdades:

$$|5x - 2| - 2x + (2x) \geq 2x + 3 + (2x)$$

$$|5x - 2| \geq 4x + 3$$

Una vez organizada la desigualdad se evalúa el valor absoluto, obteniendo así las dos desigualdades y se proceden a resolverlas:

$5x - 2 \leq -(4x + 3)$

Se resuelve:

$$5x - 2 + (4x + 2) \leq -4x - 3 + (4x + 2)$$
$$9x\left(\frac{1}{9}\right) \leq -1\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$x \leq -\frac{1}{9}$$

$5x - 2 \geq 4x + 3$

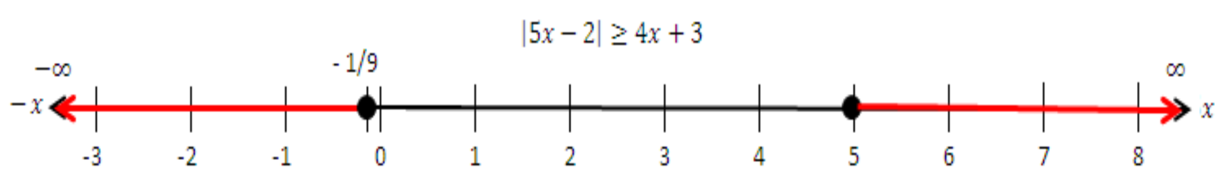
Se resuelve:

$$5x - 2 + (-4x + 2) \geq 4x + 3 + (-4x + 2)$$
$$x \geq 5$$

Una vez resuelta las dos desigualdades, se obtiene como respuesta final la unión de los dos intervalos. En este caso, son los números menores a menos un noveno y los mayores a cinco, en intervalos se mi abierto; es decir, se incluye en uno de los extremos, menos un noveno y el cinco y en el otro extremo menos infinito e infinito, respectivamente. El intervalo se expresa de la siguiente manera:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{9}\right] \cup [5, \infty)$$

En la gráfica 4, se muestra el intervalo sobre la recta real.



Gráfica 2.4. Intervalo sobre la recta real

Aplicaciones y ejemplos

Factorizar el siguiente polinomio:

$(x^2-25)+(x^2-10x+25)-(x^3-125)$	**Expresión dada**
$(x+5)(x-5)+(x^2-10x+25)-(x^3-125)$	Factorización 1° término (Diferencia de Cuadrados Perfectos)
$(x+5)(x-5)+(x-5)^2-(x^3-125)$	Factorización 2° término (Trinomio cuadrado perfecto)
$(x+5)(x-5)+(x-5)^2-(x-5)(x^2+5x+25)$	Factorización 3° término (Diferencia de Cubos Perfectos)
$(x-5)\big((x+5)+(x-5)-(x^2+5x+25)\big)$	Factorización por Factor común
$(x-5)(x^2+7x+25)$	Reducción de términos semejantes

Tabla 2.1 Ejercicio.

Factorizar el siguiente polinomio:

$(3x^2+13x-10)+(9x^2-6x)$	**Expresión dada**
$(3x-2)(x+5)+(9x^2-6x)$	Factorización 1° término (Trinomio de la forma ax^2+bx+c)
$(3x-2)(x+5)+3x(3x-2)$	Factorización 2° término (Factor Común)
$(3x-2)\big((x+5)+3x\big)$	Factorización por Factor común
$(3x-2)(4x+5)$	Reducción de términos semejantes

Tabla 2.2 Ejercicio.

Realizar la siguiente operación y simplificar si es posible:

$\frac{x}{x^2-3x-4}-\frac{2x}{x^2-1}+\frac{x^2-6x-4}{x^3-4x^2-x+4}$	**Expresión dada**
$\frac{x}{(x-4)(x+1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}+\frac{x^2-6x-4}{(x-4)(x+1)(x-1)}$	Factorización de denominadores

$\frac{x(x-1)-2x(x-4)+(x^2-6x-4)}{(x-4)(x+1)(x-1)}$	Homogenización de las fracciones utilizando M.C.M de los denominadores
$\frac{x^2-x-2x^2+8x+x^2-6x-4}{(x-4)(x+1)(x-1)}$	Multiplicar
$\frac{x-4}{(x-4)(x+1)(x-1)}$	Reducción de términos semejantes
$\frac{1}{(x+1)(x-1)}$	Simplificación

Tabla 2.2 Ejercicio

Racionalizar la siguiente fracción:

$\frac{x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$	**Expresión dada**
$\frac{x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$	Multiplicar por el conjugado del denominador Multiplicar por el conjugado del denominador
$\frac{x^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{x-(x+1)}$	Homogenización de las fracciones utilizando M.C.M de los denominadores
$x^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$	Reducir términos semejantes en el denominador

Tabla 2.3 Ejercicio

Racionalizar la siguiente fracción:

$\frac{4}{\sqrt[3]{1-x^3}+x}$	**Expresión dada**
$\frac{4}{\sqrt[3]{1-x^3}+x} \cdot \frac{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\ (1-x^3)^{2/3}}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\ (1-x^3)^{2/3}}$	Multiplicar utilizando la factorización de una de cubos
$\frac{4\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\ (1-x^3)^{2/3}\right)}{(1-x^3)+x^3}$	Eliminar raíz cúbica
$4\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\ (1-x^3)^{2/3}\right)$	Reducir términos semejantes en el denominador

Tabla 2.4 Ejercicio

Resolver la siguiente ecuación lineal:

$\boldsymbol{-3(2x+7)+(-5x+6)=8(1-2x)-(x-3)}$	**Expresión dada**
$\boldsymbol{-6x-21-5x+6=8-16x-x+3}$	Multiplicación
$\boldsymbol{-11x-15=-17x+11}$	Reducción de términos semejantes
$\boldsymbol{17x-11x=15+11}$	Reducción de términos semejantes
$\boldsymbol{x=\frac{26}{6}}$	Reducción de términos semejantes
$\boldsymbol{x=\frac{13}{3}}$	Simplificación

Tabla 2.5 Ejercicio

Planteamiento de problema: seis veces el ancho de una sala excede en 4m la longitud de la sala, y si la longitud aumentada en 3m se divide entre el ancho, el cociente es 5 y el residuo es 3. Hallar las dimensiones de la sala.

- Identificar las incógnitas:

$$x = \text{Ancho}$$
$$y = \text{Longitud}$$

- Establecer relación entre las incógnitas:

$$6x = y + 4$$
$$5x = y$$

- Establecer la ecuación:

$$6x = 5x + 4$$

- Resolver la ecuación y dar la respuesta

$$6x - 5x = 4 \Rightarrow \quad x = 4$$
$$y = 5(4) = 20$$

Resolver la siguiente desigualdad:

$(2x-3)^2+4x^2(x-7)<4(x-2)^3$	**Expresión dada**
$4x^2-12x+9+4x^3-28x^2 < 4x^3-24x^2+48x-32$	Expansión de los factores
$4x^2-12x+9+4x^3-28x^2-4x^3+24x^2-48x+32<0$	Hacer cero un lado de la desigualdad
$36x+41<0$	Reducción de términos semejantes
$x<-\frac{41}{36}$	Despejar x

Tabla 2.6 Ejercicio

Resumen

En esta segunda unidad se hizo un repaso de las expresiones algebraicas y se desarrollaron los ocho casos de factorización más comunes. También se trabajó con fracciones algebraicas mostrando sus características (simples o compuestas) al igual que se realizaron operaciones entre ellas.

Adicionalmente, se dio la definición del concepto de racionalización, con lo que se hace un acercamiento a las fracciones algebraicas con radicales en su denominador. El siguiente tema que se expuso fue el de ecuaciones, en el que se trataron las propiedades de la igualdad y se mostró cómo resolver diferentes tipos de ecuaciones (lineales, cuadráticas, fraccionarias y de orden superior).

Posteriormente, se hizo un refuerzo a la factorización, con la división sintética, su teoría y desarrollo, y luego se expusieron las aplicaciones de las ecuaciones en problemas sencillos de la vida real.

Finalmente, se llegó al tema de desigualdades, en el que se explicó cómo resolver desigualdades lineales, cuadráticas y con valor absoluto en sus expresiones.

Bibliografía

- STEWART, J. (2008). Pre cálculo. 5ª. Edición. Thompson Editores.
- SWOKOWSKI, E. (1998). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Tomson Editores. 9ª Edición. México,.
- URIBE CALAD, JA. (1986).Julio Alberto. Matemáticas básicas y operativas. Susaeta ediciones & cia. ltda.

Referencias web

- http://azul2.bnct.ipn.mx/algebra/factorizacion.PDF
- http://www.geolay.com/guias/fracciones%20algebraicas.pdf
- http://www.vitutor.com/di/re/r17.html
- http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuaciones_Seg_grado.html
- http://www.pupr.edu/cpu-old/pdf/Matematicas/Math110/4.Desigualdades%20con%20Valor%20Absoluto.pdf