UNIDAD 1. CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Los números reales son el conjunto de números naturales, cardinales, enteros racionales e irracionales.

Introducción

Recordar los axiomas de los números reales de la suma y multiplicación llevará a las leyes usadas por el álgebra, para esto se abordarán diferentes operaciones entre reales.

De otra parte, con el concepto de número real se tratará el de número complejo y se harán diferentes operaciones.

Por último, se realizarán ejercicios prácticos para hacer operaciones con expresiones algebráicas.

Objetivos

Objetivo general

Repasar y apropiar las operaciones y axiomas de la matemática básica mediante los números reales.

Objetivos específicos

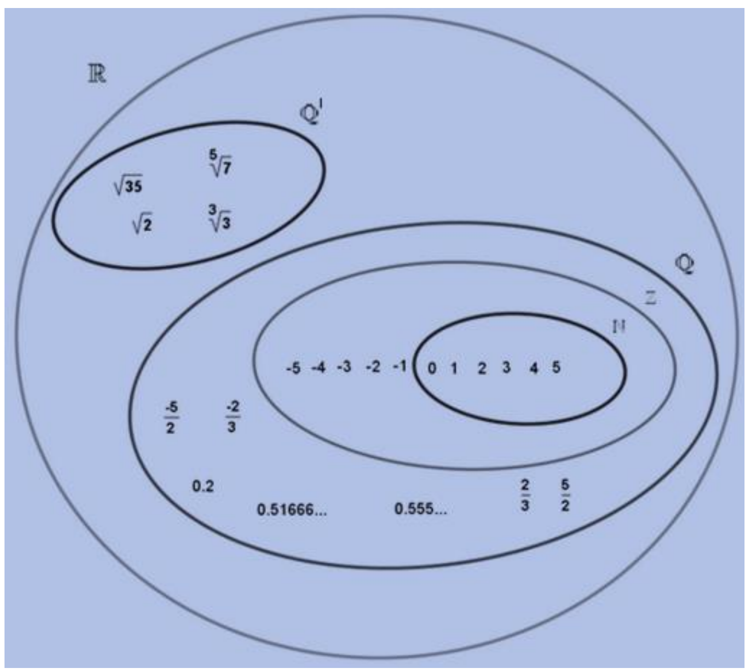
- Entender y aplicar correctamente los axiomas de los números reales.
- Usar y realizar cálculos con números reales y complejos.
- Realizar operaciones con expresiones algebraicas, productos y cocientes notables

1.1 Axiomas de números reales

El conjunto de los números reales está formado por la unión del conjunto de los números racionales (Q) y el conjunto de los números irracionales (Q'); es decir, y como aparece en la gráfica 1, R = Q U Q'.

El conjunto de los **números racionales** (Q), está formado por el conjunto de los números enteros (Z), decimales finitos e infinitos periódicos. A su vez, el conjunto de los enteros lo conforma el conjunto de los enteros positivos, el cero y los enteros negativos.

Al conjunto de los enteros positivos también se le denomina conjunto de números naturales (N). Ejemplos:5, -1.3, 0, 1/7, -13, 122.333…, -12/5, 2.5, -86.74252525, …



Gráfica 1.1. Conjunto de números reales
Fuente: Modificado de: http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html

Los números racionales se forman a partir de razones entre números enteros y donde el denominador no puede ser cero (0); es decir, si p y q son enteros, p/q y q≠0, es un número racional.

El conjunto de los **números irracionales** (Q'), está representado por el conjunto de los números con decimales infinitos no periódicos y las raíces que no son exactas.

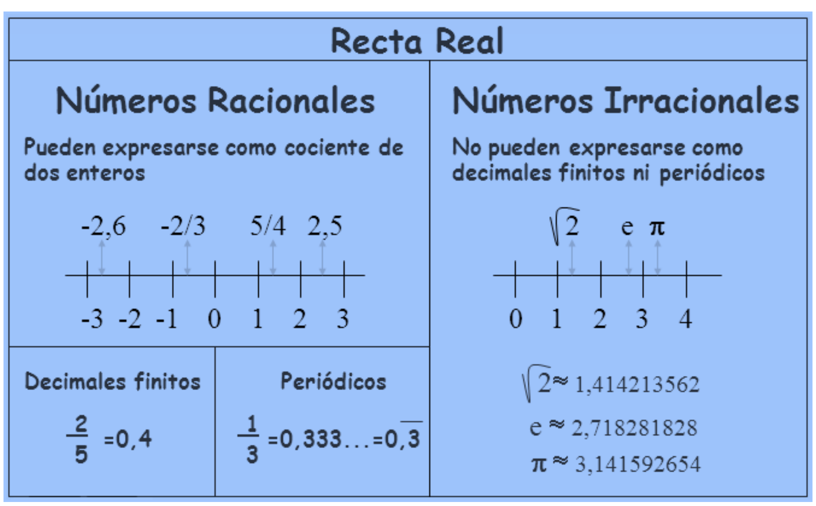
Ejemplos: $7.321456258 \ldots, -0.3141592 \ldots, \pi, \sqrt[2]{5}, e, \sqrt[3]{2}$

Los números irracionales se forman a partir de aquellos números que no se pueden expresar como razones entre números enteros.

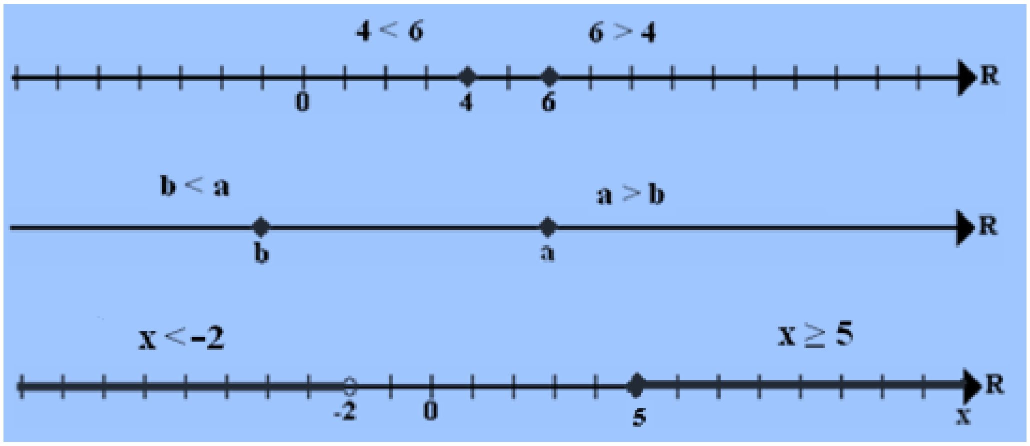
Geométricamente, todos los números reales se pueden representar en la **recta real** mediante puntos, como se puede apreciar en la gráfica 2. Existe una relación de uno a uno entre los puntos de la recta real con cada uno de los elementos del conjunto de los números reales. Por lo tanto, después de ubicar todos los reales en la recta, ésta queda completa o totalmente cubierta sin dejar ningún espacio o hueco en la misma, a esta relación se le conoce como la **propiedad de la Completez**.

Desigualdades

Denotan orden en la recta real. Si el número **a** esta a la derecha del número **b** en la recta real, **a** es mayor que **b** y se denota **a > b**; dando la recta una idea de orden. De manera análoga, y como aparece en la gráfica 3, si **a** esta a la izquierda de **b** en la misma recta, **a** es menor que **b** y se denota **a < b**; no sobra decir, que si están en el mismo punto son iguales.



Gráfica 1.2. Recta real
Fuente: http://www.google.com.co/recta+real+matematica&rlz=1R2ADRA_es



Gráfica 1.3. Desigualdades
Fuente: modificado de: http://publiespe.espe.edu.ec/librosvirtuales/funciones/funciones-matematicas-y-matrices/funciones-matematicas06.pdf

Al realizar las operaciones de suma y multiplicación entre reales (sistema {R ; + ; *} con estructura de campo, se cumplen o poseen los siguientes **axiomas o propiedades**:

Propiedades de la suma y la multiplicación (+,*)

- **Propiedad Clausurativa**: la suma de dos o más números reales es un real; es decir, si p y q ∈ R → p + q ∈ R.

  Ejemplo:

  3.5 + (-4.8) = -1.3

  De manera similar, el producto de dos o más números reales es un real; es decir, si p, q y r ∈ R → p * q ∈ R.

  Ejemplo:

  -4 * 3π = -12π.

- **Propiedad Asociativa:** en la suma de tres o más números reales. No interesa cuál de los dos se suma primero. Es decir, si p, q y r ∈ R → p + q + r = (p + q) + r = p + (q + r).

Ejemplo:

-7 + 1/2 + (-3/4) = (-7 + 1/2) + (-3/4) = -7 + [1/2 + (-3/4)]

-29/4 = -13/2 + (-3/4) = -7 + (-1/4)

-29/4 = -29/4 = -29/4

Sucede similar en el producto de tres o más números reales; no interesa cuál de los dos se multiplica primero; es decir, si p, q y r ∈ R → p * q * r = (p * q) * r = p * (q * r).

Ejemplo:

-7 * 1/2 * (-3/4) = (-7 * 1/2) * (-3/4) = -7 * [1/2 * (-3/4)]

21/8 = -7/2 * (-3/4) = -7 * (-3/8)

21/8 = 21/8 = 21/8

- **Propiedad Conmutativa**: la suma de dos o más números reales se puede hacer en cualquier orden; es decir, si p y q ∈ R → p + q = q + p.

  Ejemplo:

  3.5 + (-4.8) = -4.8 + 3.5

  Sucede similar con el producto de dos o más números reales y se puede hacer en cualquier orden; es decir, si p y q ∈ R → p * q = q * p.

  Ejemplo:

  -4 * 3π = 3π * (-4)

- **Propiedad Modulativa:** en la suma, el cero (0) es un elemento **neutro aditivo**, así: para todo p ∈ R se tiene: p + 0 = 0 + p = p.

  Ejemplo:

  -3/7 + 0 = 0 + (-3/7) = -3/7

De manera similar en la multiplicación el uno (1) es un elemento **neutro multiplicativo**, así:

Para todo p ∈ R se tiene: p * 1 = 1 + p = p.

Ejemplo:

-3/7 * 1 = 1 * (-3/7) = -3/7

- **Propiedad Inverso:** en la suma el **inverso aditivo** de p, es –p; es decir, todo número real p tiene su opuesto o negativo -p, tal que, para todo p ∈ R se tiene: p + (-p) = (-p) + p = 0.

  Ejemplo:

  -3/7 + 3/7 = 3/7 + (-3/7) = 0

Como la resta es la operación inversa de la suma, se puede inferir entonces: p – q = p + (-q).

Ejemplo:

3.5 - (-4.8) = 3.5 + 4.8 = 8.3

De manera similar, en la multiplicación, el **inverso multiplicativo** de p, es 1/p (con p ≠ 0); es decir, todo número real p tiene su inverso o recíproco 1/p, tal que, para todo p ∈ R se tiene: p * (1/p) = (1/p) * p = 1.

Ejemplo:

-3/7 * -7/3 = -7/3 * (-3/7) = 1

Análogamente, como pasa en la resta, la división es la operación inversa de la multiplicación. Por ello se puede inferir entonces que: p ÷ q = p * (1/q).

Ejemplo:

1/2 ÷ (-3/4) = 1/2 * (-4/3) = -2/3

- **Propiedad Distributiva:** propiedad que vincula a la suma con la multiplicación, así:

  Si p, q y r ∈ R → p * (q + r) = (p * q) + (p * r).

  Ejemplo:

  -7 * (1/2 + (-3/4)) = (-7 * 1/2) + (-7 * (-3/4)]

  -7 * (-1/4) = -7/2 + (21/4)

  7/4 = 7/4

Propiedades de igualdad de reales (+ , *)

- **Reflexiva:** todo número real es igual a sí mismo. Es decir, para todo p ∈ R se tiene: p = p
- **Simétrica:** para todo p y q ∈ R se tiene: p = q → q = p, por lo tanto, q puede sustituir o reemplazar a p en cualquier enunciado o expresión sin que altere su verdad o valor respectivamente.
- **Transitiva:** para todo p, q y r ∈ R se tiene: p = q y q = r → p = r
- **Uniformidad:** se puede sumar un mismo número real a cada miembro de una igualdad y la igualdad no se altera; es decir, para todo p, q y r ∈ R se tiene: p = q → p + r = q + r
  De manera similar, se puede multiplicar por un mismo número real a cada miembro de una igualdad y la igualdad no se altera; es decir, para todo p, q y r ∈ R se tiene: p = q → p * r = q * r

1.2 Potenciación de números reales

Como es bien sabido, un producto de números iguales se puede escribir en notación exponencial. Si $p \in R$ y $n \in Z^{+}$, $\underbrace{p * p * \ldots * p}_{n\ veces} = p^{n}$; siendo p^{n} la n-ésima potencia de p y única. En esta expresión, p es la **base,** n el **exponente** y p ≠ 0.

Al resultado de esta operación se le llama **potencia**.

Propiedades

Si p y q ∈ R y m y n ∈ N, se tiene:

- **Propiedad 1**: $p^m * p^n = p^{m+n}$; cuando se multiplican potencias de la misma base, se escribe la base y se suman los exponentes.

  Ejemplo:

$$7^3 * 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$$

- **Propiedad 2:** . $\frac{p^m}{p^n} = p^{m-n} \therefore con\ p \neq 0$; cuando se dividen potencias de la misma base, se escribe la base y se restan los exponentes.

  Ejemplo:

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

  De forma particular; $si\ m = n\ se\ tiene\ p^0 = 1$, cuando se eleva cualquier número a la potencia cero (0), el resultado siempre es uno (1).

  Ejemplo:

$$\frac{p^4}{p^4} = p^{4-4} = p^0 = 1$$

  También se deduce que $p^{-n} = {}^{1}\!/_{p^n}$; cuando se tiene una potencia negativa, se tiene el recíproco.

  Ejemplo:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

- **Propiedad 3:** $(p^m)^n = p^{m*n}$; cuando se eleva una potencia a otra potencia, se escribe la base y se multiplican los exponentes.

  Ejemplo:

$$(7^3)^5 = 7^{3*5} = 7^{15}$$

- **Propiedad 4:** $(\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q})^{\boldsymbol{n}} = p^n * q^n$; cuando se eleva un producto a una potencia, se debe hacer el producto de sus potencias: elevar cada factor a la potencia.

  Ejemplo:

$$(3 * 6)^4 = 3^4 * 6^4, \ \ (18)^4 = 81 * 1296 \ \ 104976 = 104976$$

- **Propiedad 5.** $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n} \therefore con\ q \neq 0$; cuando se eleva un cociente a una potencia, se debe hacer el cociente de sus potencias: elevar tanto el numerador y denominar a la potencia.

  Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{3^4}{6^4} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{81}{1296} \qquad \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

- **Propiedad 6.** $Si\ p = q\ entonces\ p^n = q^n$ (Uniforme de la potenciación).

  Ejemplo:

$$5 = a\ entonces\ 5^3 = a^3$$

- **Propiedad 7** $\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{q^n}{p^n}$; cuando se eleva una fracción a una potencia negativa, se debe invertir la fracción y cambiar el signo del exponente.

  Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{1}{\frac{3^4}{4^4}} = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$

  De manera análoga; $\frac{p^{-m}}{q^{-n}} = \frac{q^n}{p^m}$; cuando en una fracción tanto el numerador como denominador están elevados a una potencia negativa, se debe invertir la fracción y cambiar el signo de los exponentes.

  Ejemplo:

$$\frac{2^{-3}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} \quad \frac{2^{-3}}{3^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{3^2}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

1.3 Radicación de números reales

A partir de la potenciación de los reales se puede tener en notación exponencial $p^{1/n} = q$; que equivale: $\sqrt[n]{p} = q$. Siendo q la raíz n-ésima de p; es decir, p elevado a la n-ésima potencia da como resultado q.

En esta última expresión, p es el **radicando,** n es el **índice** y q es la **raíz**. Al símbolo se le llama **radical**.

Si n es par:

a) p es negativo, entonces, q no existe.

b) p es positivo, entonces, ±q

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{-81} = No\ existe\ en\ los\ reales.$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3$$

Si n es impar, q existe para cualquier real.

Ejemplos:

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \qquad \sqrt[5]{32} = 2$$

Propiedades

Si p, q, m y n ∈ R positivos, se tiene:

- **Propiedad 1:** $\sqrt[n]{p * q} = \sqrt[n]{p} * \sqrt[n]{q}$; la raíz n-ésima de un producto es igual al producto de sus raíces n-ésimas.

  Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8 * 125} = \sqrt[3]{8} * \sqrt[3]{125}$$

$$\sqrt[3]{1000} = 2 * 5$$

$$10 = 10$$

De forma análoga; $\sqrt[m]{p} * \sqrt[n]{q} = \sqrt[m*n]{p^n} * \sqrt[m*n]{q^m}$.

Ejemplo:

$$\sqrt[2]{16} * \sqrt[3]{27} = \sqrt[6]{16^3} * \sqrt[6]{27^2}$$

$$4 * 3 = 4 * 3$$

$$12 = 12$$

- **Propiedad 2:** $\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}, con\ q \geq 0$; la raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de sus raíces n-ésimas.

  Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$$

- **Propiedad 3:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[mn]{p}$; la raíz de una raíz es igual a la raíz de la multiplicación de los índices.

  Ejemplo:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[3*4]{4096}$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[12]{4096}$$

$$2 = 2$$

- **Propiedad 4:** $\sqrt[n]{p^n} = p, si\ n\ es\ impar$.

  Ejemplo:

$$\sqrt[5]{7^5} = 7$$

- **Propiedad 5:**. $\sqrt[n]{p^n} = |p|, si\ n\ es\ par;$

  Ejemplo: $\sqrt[6]{7^6} = \pm 7 = |7|$

Exponentes racionales

Para $p^{m/n} = \sqrt[n]{p^m} = \left(\sqrt[n]{p}\right)^m$ y para $p^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{p^m}}$; en donde m y n son enteros y si n es par, p≥0.

- **Propiedad 6:** $\sqrt[m]{p} * \sqrt[n]{p} = \sqrt[m*n]{p^{m+n}}; es\ decir,\ p^{1/m} * p^{1/n} = p^{1/m+1/n} = p^{m+n/m*n}$.

  Ejemplo:

  $$\sqrt[2]{16} * \sqrt[4]{16} = \sqrt[8]{16^6}; es\ decir,\ (16)^{1/2} * (16)^{1/4} = (16)^{(1/2+1/4)} = (16)^{(3/4)}$$

  $$4 * 2 = \sqrt[8]{16777216}$$

  $$8 = 8$$

- **Propiedad 7:** $\frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[m*n]{p^{n-m}} = p^{n-m/m*n}\ \therefore con\ n \geq m$

  Ejemplo:

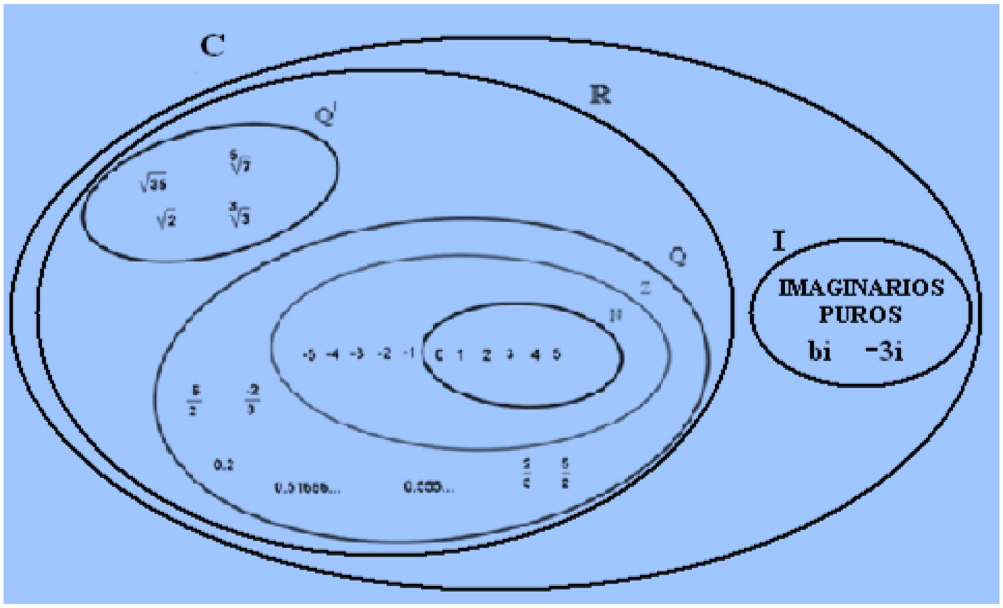
  $$\frac{\sqrt[2]{81}}{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[8]{81^2} = (81)^{(2/8)} = (81)^{(1/4)}$$

  $$\frac{9}{3} = \sqrt[8]{6561}$$

  $$3 = 3$$

1.4 Números complejos

Los número complejos están formados por una parte real y una imaginaria; por ejemplo en la ecuación de la forma, $x^2 + a = 0$, la solución es $x = \pm\sqrt{-a}$ y se halla en el conjunto de dichos números.



Gráfica 1.4 Conjunto de números complejos
Fuente: Modificado de: http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html

La solución anterior se puede generalizar por la expresión $x \pm \sqrt[n]{-a} = \pm\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{-1}$, en donde n es par. Suponiendo que $\sqrt[n]{a} = b$, se tiene: $x = \pm bi$.

Ejemplo:

$$y^2 + 25 = 0$$

$$y^2 = -25$$

$$y = \pm\sqrt{-25}$$

$$y = \pm 5\sqrt{-1}$$

$$y = \pm 5i$$

A la cantidad $\sqrt{-1} = i$, es llamada **unidad imaginaria** y se deduce por lo tanto que $i^2 = -1$.

Entonces, un número **imaginario puro** está dado por la forma $bi, en\ donde\ b \in R\ y\ b \neq 0$.

El conjunto de los números imaginarios puros está dado por compresión así: $I = \{x/x = bi; b \in R,\ b \neq 0\}$.

Ahora bien, un número complejo C, está compuesto por una parte real y una imaginaria así: z = a + bi, en donde: a es la **parte real** y se denota Re(z)=a y b es la **cantidad imaginaria**, denotándose Im(z)=b.

El conjunto de los números complejos está dado por compresión así: $C = \{a + bi/a, b \in R\ e\ i^2 = -1\}$.

Todo número real se puede expresar de forma compleja a+0i. De forma análoga, un imaginario puro se expresa 0+bi. También, el número real cero (0), es un número complejo de la forma 0 + 0i.

Estos son algunos ejemplos:

$$7 - 6i \quad ; \quad Parte\ real\ 7, parte\ imaginaria\ -6$$

$$\sqrt{7} + \frac{6}{5}i \quad ; \quad Parte\ real\ \sqrt{7}, parte\ imaginaria\ \frac{6}{5}$$

$$-17 \quad ; \quad Parte\ real\ -17, parte\ imaginaria\ 0$$

$$\sqrt{6}i \quad ; \quad Parte\ real\ 0, parte\ imaginaria\ \sqrt{6}$$

$$0 \quad ; \quad Parte\ real\ 0, parte\ imaginaria\ 0$$

Dos números **complejos son iguales** si tanto la parte real como la imaginaria son iguales, así:

$$a + bi = c + di \ \leftrightarrow a = c\ y\ b = d$$

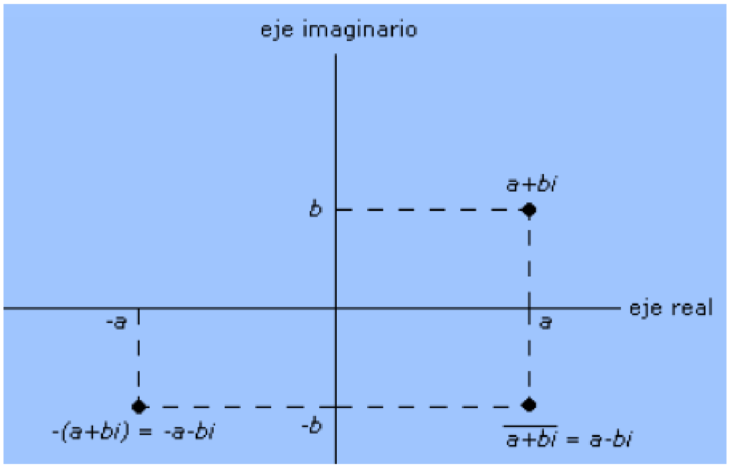
Ejemplo:

$$a + bi = 7 - 6i \ \rightarrow a = 7\ y\ b = -6$$

Los **Complejos conjugados** son de la forma: $a + bi\ y\ a - bi$. Ver .

$$\sqrt{7} + \frac{6}{5}i \ \rightarrow \ \sqrt{7} - \frac{6}{5}i$$

Por último, los números complejos se pueden representar geométricamente en el **Plano complejo** así: la parte real a, se representa en el eje de las x y la parte imaginaria b, en el eje de las y, en un plano cartesiano:



Gráfica 1.5. Plano complejo
Fuente: http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad4/u4comte30.pdf

1.4.1 Operaciones con números complejos

Suma

Se suman algebraicamente entre sí, tanto la parte real como la imaginaria:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Ejemplo:

$$(15-4i)+(-8+0.5i)=7-3.5i$$

Resta

Se aplica a – b = a + (-b); por lo tanto, se suman algebraicamente, entre sí, tanto la parte real como la imaginaria del minuendo con el inverso aditivo del sustraendo así:

$$(a+bi)-(c+di)=(a+bi)+[-(c+di)]=(a-c)+(b-d)i.$$

Ejemplo:

$$(15-4i)-(-8+0.5i)=(15-4i)+(8-0.5i)=23-4.5i$$

Multiplicación

Se multiplica cada término de un número por cada término del otro número (propiedad distributiva) y después se reducen algebraicamente los términos semejantes, teniendo en cuenta que, $i^2=-1$, así:

$$(a+bi)*(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ejemplo:

$$(15-4i)*(-8+0.5i)=$$

$$-120+7.5i+32i+2=$$

$$-118+39.5i$$

División

Se racionaliza el denominador mediante su conjugada y se procede igual que la multiplicación, así:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo:

$$\frac{15-4i}{-8+0.5i}=\frac{(15-4i)(-8-0.5i)}{(-8+0.5i)(-8-0.5i)}=$$

$$\frac{-120 - 7.5i + 32i - 2}{64 + 0.25} = \frac{-122 + 24.5i}{64.25} =$$

$$\frac{-122}{64.25} + \frac{24.5}{64.25}i$$

Potenciación

Se considera al número complejo como un binomio y los coeficientes se obtienen del triángulo de Pascal o por el binomio de Newton, así:

$$(a \pm bi)^2 = a^2 \pm 2abi - b^2.$$

Ejemplo:

$$(15 + 4i)^2 = 225 + 120i - 16 = 209 + 120i$$

$$(15 - 4i)^2 = 225 - 120i - 16 = 209 - 120i$$

1.5 Operaciones de expresiones algebraicas

Una expresión algebraica está formada por la combinación de números, letras, signos de operación (+, -, *, /, √) y signos de agrupación (( ), [ ], { }).

Ejemplos:

- $7 + 4y - 6x + z^2$
- $3ax^2 + bxy^3 + \sqrt{xyz}$
- $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{y}\right)^3$
- $\frac{7}{3}mx^2yz^3$

A las cantidades separadas por los signos + o – se les denomina términos y están formados por factores que pueden ser números o letras. A los números se les llama **coeficientes numéricos** y son constantes. Las letras pueden ser **constantes** o

variables. Al conjunto de los números y constantes se les denomina **coeficiente** del término.

También es necesario tener en cuenta que según la cantidad de términos, una expresión algebraica puede ser:

- Un **Monomio:** es la expresión algebraica que tiene un solo término. Además del ejemplo D, anterior, los siguientes también son ejemplos de monomios:

$$3ax^2; \quad \sqrt{xyz}; \quad \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{y}\right)^3; \quad 6mx^2yz^3$$

- Un **Binomio:** es la expresión algebraica que tiene dos términos. Además del ejemplo C, anterior, los siguientes también son ejemplos de binomios:

$$3ax^2+\sqrt{xyz}; \quad (p+q)^3; \quad mx^2yz^3-9$$

- Un **Trinomio**: es la expresión algebraica que tiene tres términos. Además del ejemplo B, anterior, los siguientes también son ejemplos de trinomios:

$$a-b^2+c; \quad 3ax^2+\sqrt{xyz}-\frac{7}{3}mx^2yz^3; \ (a+b+c)^2$$

- Un **Polinomio:** es la expresión algebraica que tiene más de tres términos. Además del ejemplo A, anterior, los siguientes también son ejemplos de polinomios:

$$a-b^2+c+d^3; \quad 3ax^2+\sqrt{xyz}-\frac{7}{3}mx^2yz^3-bxy+\frac{3x}{2y}; \ (a+b+c+d+e)^3$$

Un término es **semejante** a otro cuando sólo difiere en su coeficiente numérico.

Ejemplos:

$$3ax^2; \ \frac{3}{5}ax^2; \ -8ax^2; \ \sqrt{7}ax^2$$

Si una expresión algebraica entre paréntesis está precedida por el **signo más**, todos los términos salen con el **mismo signo** al cancelar el paréntesis:

- $(a-b^2+c+d^3)=a-b^2+c+d^3$
- $\left(3ax^2+\sqrt{xyz}-\frac{7}{3}mx^2yz^3-bxy+\frac{3x}{2y}\right)=3ax^2+\sqrt{xyz}-\frac{7}{3}mx^2yz^3-bxy+\frac{3x}{2y}$

Similarmente, si una expresión algebraica, entre paréntesis, está precedida por el **signo menos**, todos los términos salen con el **signo contrario** al cancelar el paréntesis:

- $-(a - b^2 + c + d^3) = -a + b^2 - c - d^3$
- $-\left(3ax^2 + \sqrt{xyz} - \frac{7}{3}mx^2yz^3 - bxy + \frac{3x}{2y}\right) = -3ax^2 - \sqrt{xyz} + \frac{7}{3}mx^2yz^3 + bxy - \frac{3x}{2y}$

Las principales operaciones de las expresiones algebraicas son:

Suma – Resta

Para la suma y resta de expresiones algebraicas se utilizan las propiedades vistas en los números reales, teniendo en cuenta siempre los términos semejantes y que a – b = a + (-b).

Los siguientes son ejemplos de suma y resta de expresiones algebraicas:

- **Sumar**:

$$a - b^2 + c + d^3 + (-3a - 7b^2 + 2c^2 - d^3) =$$
$$a - b^2 + c + d^3 - 3a - 7b^2 + 2c^2 - d^3 =$$
$$-2a - 8b^2 + c + 2c^2$$

- **Restar**:

$$a - b^2 + c + d^3 - (-3a - 7b^2 + 2c^2 - d^3) =$$
$$a - b^2 + c + d^3 + 3a + 7b^2 - 2c^2 + d^3 =$$
$$4a + 6b^2 + c - 2c^2 + 2d^3$$

Multiplicación

Se multiplica cada término de un factor por cada término del otro factor (propiedad distributiva) y después se reducen algebraicamente los términos semejantes; teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación, así:

$$(a+b+c)(x+y+z) = ax+ay+az+bx+by+bz+cx+cy+cz$$

A manera de ejemplo, se efectúa el siguiente producto:

$$(ax-by^2-c)(x^3+5y) =$$

$$ax^4+5axy-bx^3y^2-5by^3-cx^3-5cy$$

División

Después de ordenar el polinomio de manera descendente, se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor y así se obtiene el primer término del cociente. Después se multiplica este término por cada uno de los términos del divisor y el resultado se le resta al dividendo, dando un nuevo dividendo y se procede de la misma forma con este nuevo dividendo hasta obtener un residuo de menor exponente que el divisor. Ver gráfica 1.6.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 4x - 1 & \;x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 + \;\; x^2 \qquad\qquad} & \;x^2 - 3x + 1 \\
-3x^2 + 4x \quad\; & \\
\underline{+3x^2 - 3x} \quad\; & \\
x - 1 & \\
\underline{-x + 1} & \\
0 \;\; &
\end{array}
$$

Gráfica 1.6. División de expresiones algebraicas

1.6 Productos notables y cocientes notables

Producto notable es el nombre de las multiplicaciones con expresiones algebraicas; son operaciones a las cuales se puede llegar a un resultado fácilmente mediante la aplicación de unas sencillas reglas:

PN 1. Cuadrado de la suma de un binomio

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Ejemplo:

$$\left(3\sqrt{x} + \frac{3}{2}y^2\right)^2 = \left(3\sqrt{x}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{x}\right)\left(\frac{3}{2}y^2\right) + \left(\frac{3}{2}y^2\right)^2$$

$$9x + 9x^{(1/2)}y^2 + \frac{9}{4}y^4$$

PN 2. Cuadrado de la diferencia de un binomio

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplo:

$$\left(3\sqrt{x} - \frac{3}{2}y^2\right)^2 = \left(3\sqrt{x}\right)^2 - 2\left(3\sqrt{x}\right)\left(\frac{3}{2}y^2\right) + \left(\frac{3}{2}y^2\right)^2$$

$$9x - 9x^{1/2}y^2 + \frac{9}{4}y^4$$

PN3. Cuadrado de un trinomio

$$(x \pm y \pm z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \pm 2xy \pm 2xz \pm 2yz$$

Ejemplo:

$$\left(3\sqrt{x} - \frac{3}{2}y^2 + z^{3/2}\right)^2 =$$

$$\left(3\sqrt{x}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}y^2\right)^2 + \left(z^{3/2}\right)^2 - 2\left(3\sqrt{x}\right)\left(\frac{3}{2}y^2\right) + 2\left(3\sqrt{x}\right)\left(z^{3/2}\right) - 2\left(\frac{3}{2}y^2\right)\left(z^{3/2}\right)$$

$$9x + \frac{9}{4}y^4 + z^3 - 9x^{1/2}y^2 + 6\sqrt{x}\left(z^{3/2}\right) - 3y^2z^{3/2}$$

PN 4. Cubo de la suma de un binomio

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Ejemplo:

$$\left(3\sqrt{x} + \frac{3}{2}y^2\right)^3 =$$

$$\left(3\sqrt{x}\right)^3 + 3\left(3\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{3}{2}y^2\right) + 3\left(3\sqrt{x}\right)\left(\frac{3}{2}y^2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}y^2\right)^3 =$$

$$27x^{3/2} + \frac{81}{2}xy^2 + \frac{81}{4}x^{1/2}y^4 + \frac{27}{8}y^6$$

PN 5. Cubo de la diferencia de un binomio

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Ejemplo:

$$\left(3\sqrt{x} - \frac{3}{2}y^2\right)^3 =$$

$$\left(3\sqrt{x}\right)^3 - 3\left(3\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{3}{2}y^2\right) + 3\left(3\sqrt{x}\right)\left(\frac{3}{2}y^2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y^2\right)^3 =$$

$$27x^{3/2} - \frac{81}{2}xy^2 + \frac{81}{4}x^{1/2}y^4 - \frac{27}{8}y^6$$

PN 6. Producto de la suma por la diferencia de un binomio

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Ejemplo:

$$\left(3\sqrt{x}+\frac{3}{2}y^2\right)\left(3\sqrt{x}-\frac{3}{2}y^2\right)=$$

$$\left(3\sqrt{x}\right)^2-\left(\frac{3}{2}y^2\right)^2=9x-\frac{9}{4}y^4$$

PN 7. Producto de la forma $(x+a)(x+b)$

$$(x\pm a)(x\pm b)=x^2+(a\pm b)x\pm ab$$

Ejemplos:

$$(x+5)(x+3)=x^2+8x+15$$

$$(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$$

$$(x-5)(x+3)=x^2-2x-15$$

$$(x-5)(x-3)=x^2-8x+15$$

PN 8. Producto de la forma $(ax+b)(cx+d)$

$$(ax\pm b)(cx\pm d)=acx^2+(ad\pm bc)x\pm bd$$

Ejemplos:

$$(3x+5)(2x+3)=6x^2+19x+15$$

$$(3x+5)(2x-3)=6x^2+x-15$$

$$(3x-5)(2x+3)=6x^2-x-15$$

$$(3x-5)(2x-3)=6x^2-19x+15$$

Cocientes notables (CN)

Los cocientes notables resultan de divisiones exactas entre polinomios y para sus resultados también se cuentan con unas reglas:

CN1.

$\frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + b^{n-1}; si\ n\ es\ par\ o\ impar.$

Ejemplos:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + b^{n-1};$$

Para n par:

$$\frac{16x^4 - 81y^4}{2x - 3y} = \frac{(2x)^4 - (3y)^4}{2x - 3y} =$$

$$(2x)^3 + (2x)^2(3y) + (2x)(3y)^2 + (3y)^3 =$$

$$8x^3 + 12x^2y + 18xy^2 + 27y^3$$

Para n impar:

$$\frac{32x^5 - 243y^5}{2x - 3y} = \frac{(2x)^5 - (3y)^5}{2x - 3y} =$$

$$(2x)^4 + (2x)^3(3y) + (2x)^2(3y)^2 + (2x)(3y)^3 + (3y)^4 =$$

$$= 16x^4 + 24x^3y + 36x^2y^2 + 54xy^3 + 81y^4$$

CN2.

$\frac{x^n-y^n}{x+y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - b^{n-1}; si\ n\ es\ par.$

Ejemplo:

$$\frac{16x^4 - 81y^4}{2x + 3y} = \frac{(2x)^4 - (3y)^4}{2x + 3y} =$$

$$(2x)^3 - (2x)^2(3y) + (2x)(3y)^2 - (3y)^3 =$$

$$8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3$$

CN3.

$\frac{x^n+y^n}{x+y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + b^{n-1}; si\ n\ es\ impar.$

Ejemplo:

$$\frac{32x^5 + 243y^5}{2x + 3y} = \frac{(2x)^5 + (3y)^5}{2x + 3y} =$$

$$(2x)^4 - (2x)^3(3y) + (2x)^2(3y)^2 - (2x)(3y)^3 + (3y)^4 =$$

$$16x^4 - 24x^3y + 36x^2y^2 - 54xy^3 + 81y^4$$

CN4.

$\frac{x^n+y^n}{x-y}; no\ es\ divisible.$

Ejemplo:

$$\frac{32x^5 + 243y^5}{2x - 3y} = \frac{(2x)^5 + (3y)^5}{2x - 3y}$$

Al efectuar la división, hay residuo; es decir, no es exacta.

Resumen

En esta primera unidad se hace un recuento sobre el conjunto de los números reales, que son la unión entre los conjuntos de números racionales e irracionales, empezando por sus axiomas o propiedades de la suma y multiplicación: Clausurativa, Conmutativa, Asociativa, Distributiva, Modulativa y la Inversa.

Luego, se trata a la potenciación y radicación en cuanto a sus propiedades. También, se hace una introducción a los números complejos con sus respectivas operaciones y su representación en el plano.

Por último, mediante las operaciones de suma, resta, producto y división con expresiones algebraicas se entra al campo algebraico, al igual que con los productos y cocientes notables.

Bibliografía

- STEWART, J. (2008). Pre cálculo. 5ª. Edición. Thompson Editores.
- SWOKOWSKI, E. (1998). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Tomson Editores. 9ª Edición. México,.
- URIBE CALAD, JA. (1986).Julio Alberto. Matemáticas básicas y operativas. Susaeta ediciones & cia. ltda.

Consulta web:

- http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/derivas/apuntes_calculo10/%20losnumeros.pdf (Números reales).
- http://www.amolasmates.es/pdf/Temas/3_ESO/Expresiones%20algebraicas.pdf (Expresiones algebraicas).