

UNIDAD 5. PROGRAMACIÓN ENTERA



Programación entera

Tabla de contenido

| | |
|--|-----------|
| UNIDAD 5. programación entera | 1 |
| Tabla de contenido | 2 |
| Introducción | 3 |
| Objetivos | 3 |
| Objetivo general | 3 |
| Objetivos específicos | 4 |
| 5.1 Clasificación de los problemas de acuerdo a las variables | 5 |
| 5.2 Métodos de solución..... | 6 |
| 5.2.1 Método de redondeo de la solución de programación lineal | 7 |
| 5.2.2 Método de enumeración completa | 8 |
| 5.2.3 Método de ramificación y acotación (Branch and Bound) | 9 |
| 5.2.4 Método planos cortantes o algoritmo fraccional de Gomory | 20 |
| 5.2.5 Método (algoritmo) aditivo de balas..... | 22 |
| 5.3 Tipos de problemas..... | 23 |
| 5.3.1 Problema asignación de capital..... | 23 |
| 5.3.2 Problema de costo fijo | 25 |
| 5.3.3 Problemas con restricciones de tipo si... entonces..... | 28 |
| 5.3.4 El modelo tipo “mochila” | 29 |
| 5.3.5 Problema de producción | 30 |
| 5.3.6 Problema de distribución..... | 32 |
| Resumen..... | 34 |
| Bibliografía | 35 |

Introducción

La programación entera es el método empleado para resolver problemas que tienen variables de decisión enteras. Estos modelos se han considerado submodelos de la programación lineal con la característica de enteridad.

Los creadores e investigadores de esta técnica fueron Wagner (1950) y Manne (1959), quienes desarrollaron varios métodos de solución. Uno de los primeros enfoques de solución al tipo de problemas que plantea la programación entera, fue el de evaluación de cada posible solución, es decir, cada una de las combinaciones de valores enteros para las variables del problema, conduciendo a una solución óptima exacta. A este tipo de resoluciones se les dio el nombre de métodos exactos. Por otro lado, se desarrollaron otro tipo de técnicas que recibieron el nombre de métodos heurísticos, los cuales hacen referencia a la intuición y conducen a una solución próxima a la óptima en un tiempo razonable.

Si se requiere que todas las variables sean enteras se habla de programación lineal entera pura; si se necesita que algunas de las variables de decisión sean números enteros, se tiene un problema de programación lineal entera mixta.

En otro tipo de problemas sólo se permite que las variables tomen un valor de cero o de uno; en estos casos se habla de programación lineal entera binaria (digital); si se requiere que solamente algunas de las variables tomen valores de cero o uno, se tiene un problema de programación lineal entera binaria mixta.

Para resolver problemas de programación lineal entera, se utilizan varios algoritmos como son: Ralph Gomory, ramificación y acotamiento, enumeración exhaustiva o enumeración explícita, enumeración implícita, aditivo de Egon Balas y algoritmos heurísticos. En esta unidad se explicarán los algoritmos más empleados.

Objetivos

Objetivo general

Resolver problemas en los que se empleen variables enteras, utilizando los algoritmos de solución que se ajusten a las características de dichos problemas.

Objetivos específicos

- Definir las características de un problema, enfocando su algoritmo de solución.
- Formular un problema específico utilizando el método de programación entera.
- Manejar algunas de las técnicas básicas utilizadas en la solución de problemas de programación entera.

5.1 Clasificación de los problemas de acuerdo a las variables

Dependiendo del tipo de variable que tengan los problemas a resolver, estos se pueden clasificar de la siguiente manera:

Enteros puros: Son aquellos en los que las variables únicamente pueden tomar valores enteros, así como los coeficientes que intervienen en el problema.

$$\begin{aligned}\text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeto a: } &x_1 + x_2 \leq 6 \\ &x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Mixtos: Son aquellos en los que hay, al mismo tiempo, variables continuas y variables que sólo pueden tomar valores enteros.

$$\begin{aligned}\text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeto a: } &x_1 + x_2 \leq 6 \\ &x_2 \geq 0 \\ &x_1 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Binarios: Las variables sólo pueden tomar los valores cero o uno.

$$\begin{aligned}\text{Max } z &= x_1 - x_2 \\ \text{Sujeto a: } &x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ &2x_1 - x_2 \leq 1 \\ &x_1, x_2 = \{0,1\}\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Una zapatería está analizando la posibilidad de expandir su mercado y está pensando en abrir una fábrica en Ecuador y otra en Brasil, así como construir un sólo almacén, sin embargo, hay una restricción y es si en el almacén tiene que haber fábrica.

Se cuenta con un capital de 10 millones de pesos, teniendo en cuenta que:

| | Beneficio | Capital requerido |
|---|------------|-------------------|
| X1= Construir la fábrica en Ecuador: | 9 millones | 6 millones |
| X2= Construir la fábrica en Brasil | 5 millones | 3 millones |
| X3= Construir almacén en Ecuador | 6 millones | 5 millones |
| X4= Construir almacén en Brasil: | 4 millones | 2 millones |

Tabla 5.1. beneficios y capital.

La variable de decisión X_j puede tomar el valor de 1 si se construye o de 0 si no se construye.

Función objetivo:

$$\text{Max } Z = 9 X_1 + 5 X_2 + 6 X_3 + 4 X_4$$

Restricciones:

$$X_3 + X_4 \leq 1 \text{ Alternativas mutuamente excluyentes}$$

$$X_3 \leq X_1 \text{ Se construye la fábrica sólo si se construye el almacén}$$

$$X_4 \leq X_2$$

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 10 \text{ Capital disponible}$$

$$X_j \in [0,1] \text{ para } j= 1, 2, 3, 4.$$

De esta forma:

$$\text{Max } Z = 9 X_1 + 5 X_2 + 6 X_3 + 4 X_4$$

$$X_3 + X_4 \leq 1$$

$$-X_1 + X_3 \leq 0$$

$$-X_2 + X_4 \leq 0$$

$$X_j \in [0,1] \text{ para } j= 1,2,3,4.$$

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 10$$

Sólo una debe cumplirse, mientras que la otra puede cumplirse, pero no se requiere que lo haga.

5.2 Métodos de solución

Para la resolución de problemas relacionados con programación entera, existen varios métodos para generar las restricciones especiales que conducen a la solución óptima del problema, pero también hacia la solución óptima entera deseada.

Se requiere que una solución factible tenga valores enteros para alguna o todas las variables de decisión.

La región factible no es una región continua, sino que está formada por puntos separados.

Un modelo de programación entera recibe el nombre de relajado si no se toma en cuenta la restricción de soluciones enteras. El modelo de programación entera *relajado* es el modelo de programación lineal.

Algunos de los métodos más empleados son:

- Método de redondeo de la solución de programación lineal
- Método de enumeración completa
- Método de ramificación y acotación (Branch and Bound)
- Método planos cortantes o algoritmo fraccional de Gomory

5.2.1 Método de redondeo de la solución de programación lineal

No se asegura obtener la solución óptima, en algunos casos se obtiene una solución muy lejos de la óptima.

Ejemplo 2

$$\begin{array}{ll} \text{Máx } Z = x_1 + 5x_2 & \\ \text{Sujeto a: } & \\ & +x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \end{array}$$

Solución modelo relajado (PL): $x_1 = 2$ $x_2 = 1.8$ $Z = 11$

Solución con redondeo: $x_1 = 2$ $x_2 = 1$ $Z = 7$

Solución óptima de PE: $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $Z = 10$

Al redondear se debe tener en cuenta la magnitud de las variables

Si la solución es: $Z = 5,207$
 $x_1 = 11.6$
 $x_2 = 6.8$ NO es conveniente redondear

Si en cambio: $Z = 5,207$
 $x_1 = 3,208.4$ redondear puede ser
 $x_2 = 7,055.3$ aceptable.

Siempre se debe verificar que la solución redondeada se mantenga factible.

5.2.2 Método de enumeración completa

Si hay 2 variables binarias, 4 soluciones posibles. Si hay 50 variables binarias, 2^{50} soluciones posibles.

Ejemplo 3

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 300 x_1 + 90 x_2 + 400 x_3 + 150 x_4 \\ \text{Sujeto a: } & 35 x_1 + 10 x_2 + 25 x_3 + 90 x_4 \leq 120 \\ & 4 x_1 + 2 x_2 + 7 x_3 + 3 x_4 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ binarias } 0 \text{ ó } 1 \end{aligned}$$

Existen $2^4 = 16$ alternativas de solución:

| X1 | X2 | X3 | X4 | Factible? | Z |
|----|----|----|----|-----------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | Sí | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | Sí | 150 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | Sí | 400 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | Sí | 550 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | Sí | 90 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | Sí | 240 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | Sí | 490 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | No | ----- |
| 1 | 0 | 0 | 0 | Sí | 300 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | No | ---- |
| 1 | 0 | 1 | 0 | Sí | 700 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | No | ---- |

| | | | | | |
|---|---|---|---|----|------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | No | ---- |
| 1 | 1 | 0 | 1 | No | ---- |
| 1 | 1 | 1 | 0 | No | ---- |
| 1 | 1 | 1 | 1 | No | ---- |

Tabla 5.2. Alternativas de solución.

Por tanto, la solución óptima es:

$$X_1 = X_3 = 1, X_2 = X_4 = 0, Z = 700$$

5.2.3 Método de ramificación y acotación (Branch and Bound)

El método de ramificación y acotación o también llamado Branch and Bound, resuelve el problema de tal forma que si la solución a este verifica condiciones de integridad, entonces también es la solución al problema entero, de lo contrario se comienza con la ramificación del problema.

La ramificación consiste en dividir cada problema en dos nuevos subproblemas, obtenidos mediante el uso de restricciones excluyentes que dividen el conjunto de oportunidades del problema original en dos partes, pero eliminando en ambas partes la solución no entera del problema original.

Cuando en la solución al problema una variable que es entera x_i toma el valor x_{bi} no entero, entonces se generan, a partir de dicho valor, dos restricciones $x_i \leq [x_{bi}]$ y $x_i \geq [x_{bi}]+1$ (siendo $[x_{bi}]$ la parte entera por defecto de x_{bi}).

Ejemplo 4

$$\text{Max } F(x) = 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sujeto a: } 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

La solución a este problema, no teniendo en cuenta que las variables sean enteras, es:

$$x_1 = 1,5, x_2 = 5 \text{ y } F(x) = 31$$

Esta solución no está verificando las condiciones de integridad, entonces se debe elegir la variable x_1 que no es entera y a partir de ella se generan dos restricciones:

$$x_1 \leq 1 \text{ y } x_1 \geq 2$$

Que añadidas cada una de ellas al problema original, dan lugar a dos nuevos subproblemas que serían los siguientes:

| Max $F(x) = 4x_1 + 5x_2$ | Max $F(x) = 4x_1 + 5x_2$ |
|---|---|
| Sujeto a: $2x_1 + x_2 \leq 8$ | Sujeto a: $2x_1 + x_2 \leq 8$ |
| $x_2 \leq 5$ | $x_2 \leq 5$ |
| $x_1 \leq 1$ | $x_1 \geq 2$ |
| $x_1, x_2 \geq 0$ | $x_1, x_2 \geq 0$ |

Tabla 5.3 subproblemas.

De esta forma se han eliminado todas las posibles soluciones no enteras del conjunto de oportunidades, tales que $1 < x_1 < 2$.

El proceso se repite con cada uno de los dos subproblemas obtenidos, los cuales dan lugar a otros dos subproblemas cada uno de ellos y así sucesivamente, hasta que todos los subproblemas tengan solución entera o infactible.

Utilizando únicamente la ramificación, el número de subproblemas a resolver crece exponencialmente, por este motivo para evitar el tener que resolver todos los subproblemas, la ramificación se combina con la acotación.

La acotación se basa en que los conjuntos de oportunidades de los subproblemas obtenidos en el ejemplo anterior, son a su vez subconjuntos del conjunto de oportunidades del problema. La solución óptima de los dos subproblemas siempre será inferior (problema de máximo o superior para problemas de mínimo) que la solución óptima del problema, por ser los conjuntos de elección menores.

De esta forma, el proceso de acotación consiste, para problemas de máximo, en tomar como cota inferior aquella solución entera con mayor valor de la función objetivo obtenida y dado que cualquier otro subproblema con solución no entera se sabe que al ramificarlo dará como resultado valores de la función objetivo menores o iguales, permite descartar como subproblemas a ramificar todos aquellos que tengan como solución óptima un valor de la función inferior a la cota establecida.

De este modo se reduce el número de subproblemas a ramificar y, por lo tanto, el tiempo necesario para la resolución de los problemas enteros.

Una vez resuelto el problema si la solución es entera, la solución es óptima y se ha dado una solución al problema original. Si no, se debe elegir una variable entera x_i cuyo valor sea fraccional, posteriormente se resuelven los dos problemas lineales iguales al anterior con las restricciones adicionales: uno con la restricción $X_i < [X_i]$ y el otro con la restricción $X_i > [X_i] + 1$. Después se analiza el problema con la mejor solución que cualquiera de las soluciones enteras conocidas y se elige el problema que tenga el mejor valor de la función objetivo.

Ejemplo 5

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{Sujeto a: } &4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ &8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \\ \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{Sujeto a: } &4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ &8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se obtiene la solución $x_1 = 2$, $x_2 = 8/3$, $f(x) = 128/3$. Dado que esta solución no es entera se ramifica a partir de la variable x_2 de la siguiente manera:

Subproblema 1

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{Sujeto a: } &4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ &8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &x_2 \geq 3 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ \text{Solución } &x_1=1,5, x_2=3, F(x)=42 \end{aligned}$$

Subproblema 2

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{Sujeto a: } &4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ &8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &x_2 \leq 2 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ \text{Solución } &x_1=2,5, x_2=2, F(x)=38 \end{aligned}$$

Como la solución del subproblema 1 tiene el mayor valor de la función objetivo y no es entera, se debe ramificar este subproblema a partir de la variable x_1 , de la siguiente forma:

Subproblema 1.1

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{Sujeto a: } &4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ &8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &x_2 \geq 3 \\ &x_1 \leq 1 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ \text{Solución } &x_1=1, x_2=10/3, F(x)=124/3 \end{aligned}$$

Subproblema 1.2

$$\begin{aligned} \text{Max } F(X) &= 8x_1 + 10x_2 \\ \text{Sujeto a: } &4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ &8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &x_2 \geq 3 \\ &x_1 \geq 2 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ \text{Solución } &\text{infactible} \end{aligned}$$

Dado que de todos los subproblemas todavía no ramificados (subproblemas 2, 1.1 y 1.2) el que tiene una mayor solución factible no entera es el subproblema 1.1, se ramificará este subproblema a partir de la variable x_2 , es decir:

Subproblema 1.1.1

Max $F(X) = 8x_1 + 10x_2$.
 Sujeto a: $4x_1 + 6x_2 \leq 24$
 $8x_1 + 3x_2 \leq 24$
 $x_2 \geq 3$
 $x_1 \leq 1$
 $x_2 \leq 3$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
 Solución $x_1=1, x_2=3, F(x)=38$

Subproblema 1.1.2

Max $F(X) = 8x_1 + 10x_2$
 Sujeto a: $4x_1 + 6x_2 \leq 24$
 $8x_1 + 3x_2 \leq 24$
 $x_2 \geq 3$
 $x_1 \leq 1$
 $x_2 \geq 4$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
 Solución $x_1=0, x_2=4, F(x)=40$

Ya se conoce una solución entera $x_1=0, x_2=4, F(x)=40$. Esta solución actuará como cota inferior y solamente deberán ser ramificados aquellos subproblemas con soluciones factibles no enteras que tengan un valor para la función objetivo que 40. Como el único subproblema por ramificar es el subproblema 2 y la función objetivo vale 38, el proceso se da por terminado, siendo por tanto la solución óptima al problema entero $x_1 = 0, x_2 = 4, F(x) = 40$. El árbol del problema resuelto es el siguiente:

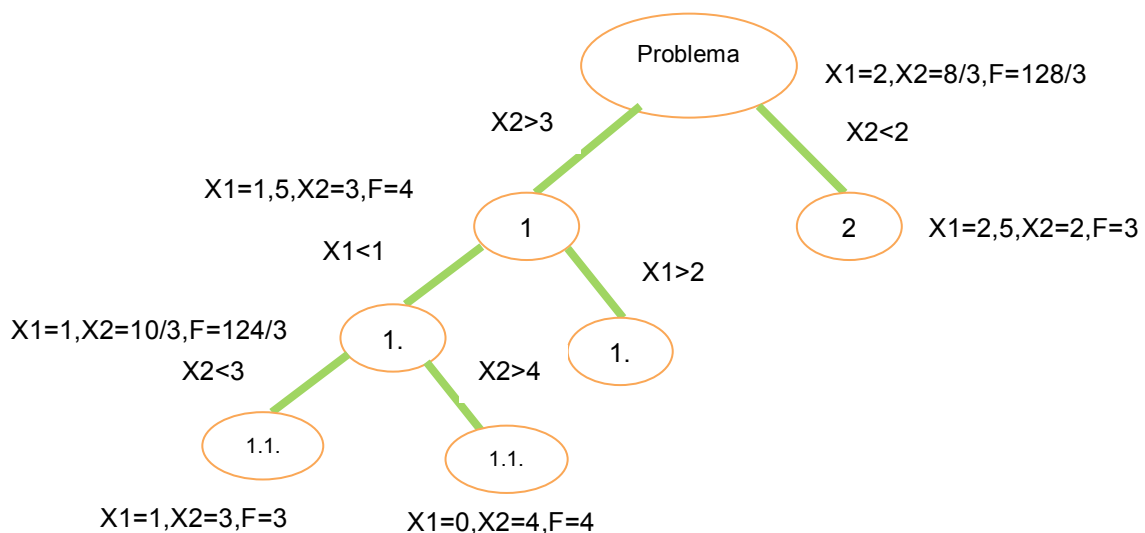


Gráfico 5.1. Árbol de ramificación del problema.

Ejemplo 6

Una mueblería fabrica mesas y sillas. Una mesa requiere de 1 hora de mano de obra y 9 pies cuadrados de madera; una silla requiere de 1 hora de mano de obra y 5 pies cuadrados de madera. Actualmente, la mueblería dispone de 6 horas de mano de obra y 45 pies cuadrados de madera. Cada mesa genera una utilidad de US\$8 y cada silla representa una utilidad de US\$5. Maximizar el beneficio de la mueblería.

De esta forma:

$$\begin{aligned}x_1 &= \text{número de mesas fabricadas} \\x_2 &= \text{número de sillas fabricadas}\end{aligned}$$

Como x_1 y x_2 deben ser enteras, el problema queda resuelto cuando:

$$\begin{aligned}\text{Max } Z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeto a: } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

A partir de lo anterior se halla:

$$\begin{aligned}\text{Subproblema 1:} \quad \text{Max } z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeto a: } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

La resolución gráfica del subproblema 1 se muestra a continuación. En este caso, la solución óptima corresponde al punto $x_1 = 15/4 = 3.75$ y $x_2 = 9/4 = 2.25$, con valor de la función objetivo $z = 165/4$.

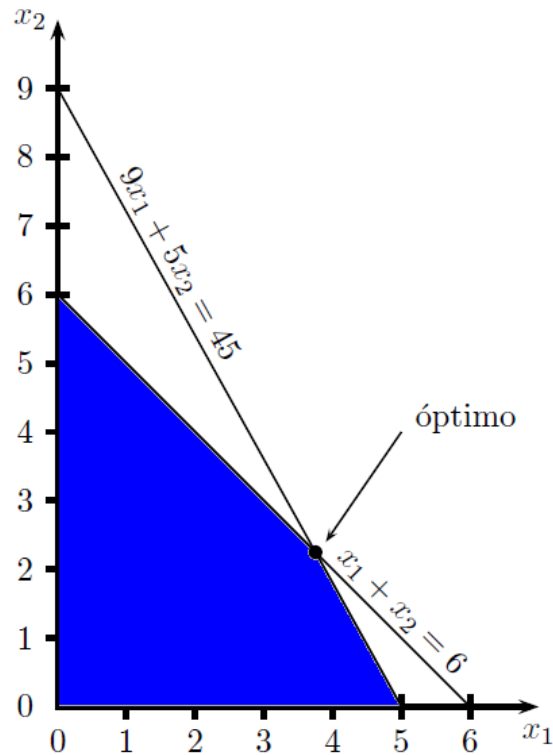


Gráfico 5.2. Región factible subproblema 1

El próximo paso es seleccionar una partición de la región factible, con el fin de obtener la solución óptima. Para ello, se escoge una variable que no satisfaga las condiciones del problema, es decir, una variable fraccionaria que debería ser entera, por ejemplo, x_1 . Como se busca un valor entero para x_1 interesa que $x_1 \leq 3$ o bien que $x_1 \geq 4$, ya que no puede haber una solución factible entera en el intervalo $3 < x_1 < 4$, en otras palabras, se buscan soluciones en los valores enteros más cercanos al valor fraccionario obtenido. De acuerdo a ello, se ramifica la variable x_1 definiendo los siguientes subproblemas:

Subproblema 2: Subproblema 1 + restricción: $x_1 \leq 3$

Subproblema 3: Subproblema 1 + restricción: $x_1 \geq 4$

Ambos subproblemas excluyen el valor $x_1 = 15/4$, es decir, la solución óptima de los subproblemas no puede ser igual al de la relajación. Por otro lado, como se está resolviendo un problema más restrictivo que la relajación original el valor de la función objetivo no puede ser mejor.

Los puntos extremos de la región factible: D, E, F y G son los posibles óptimos y evaluando se obtiene: $z_D = 0$, $z_E = 24$, $z_F = 39$ y $z_G = 30$, por lo que la mejor solución

corresponde al punto F ($x_1 = 3$; $x_2 = 3$), con valor de la función objetivo: $z = 39$. En este caso, la solución obtenida satisface las condiciones de enteridad, por lo que es posible definir como cota superior $z = 39$.

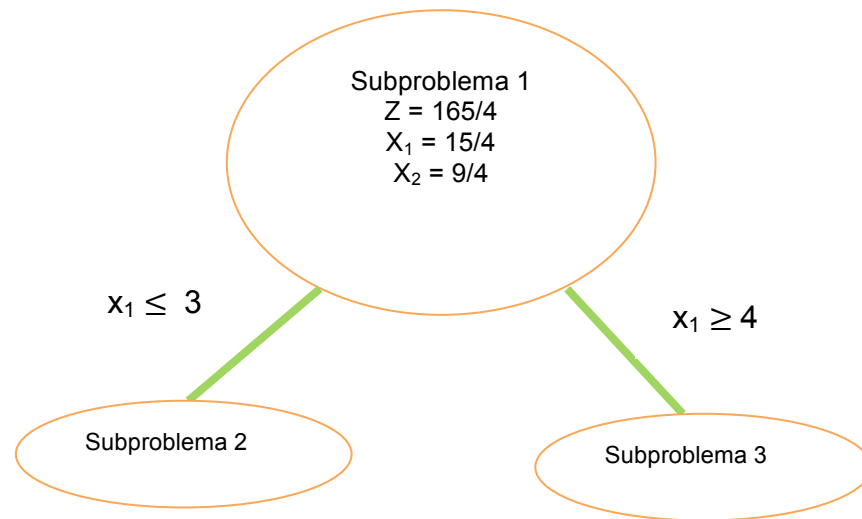


Gráfico 5.3. Árbol de ramificación subproblemas 2 y 3.

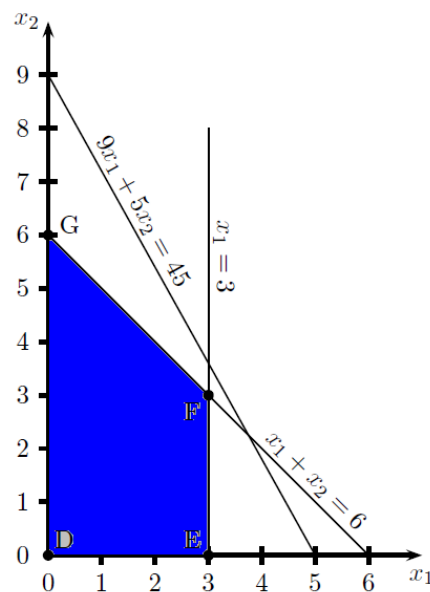


Gráfico 5.4. Región factible del subproblema 2.

Si la solución obtenida del subproblema 2 satisface todas las condiciones del problema, se debe completar la ramificación, ya que aún se puede obtener una solución menor o igual al valor óptimo del subproblema 1, pero mejor a la cota superior actual. La región

factible del subproblema 3 hace referencia a los puntos extremos: A, B y C, con respectivos valores de la función objetivo: $z_A = 40$, $z_B = 32$ y $z_C = 41$. Por lo tanto, el óptimo corresponde a: $x_1 = 4$ y $x_2 = 9/5$, valor que no satisface la condición de enteridad.

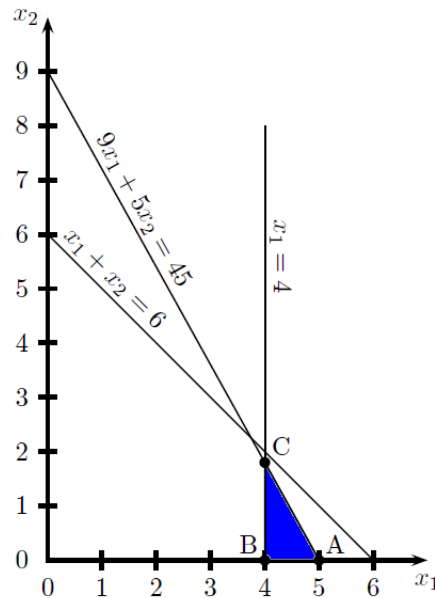


Gráfico 5.5. Región factible del subproblema 3.

Hasta ahora se dispone de una solución entera con valor de la función objetivo de 39, aunque en el subproblema 3 se obtuvo como valor óptimo: $z = 41$.

El subproblema 3 no representa una solución factible para el problema. Al ramificar a partir de este problema se podría esperar un valor de la función objetivo que sea menor o igual a 41, pero que podría ser mejor que 39, por lo que no se pueden dar como finalizadas las ramificaciones. De acuerdo a ello, se pueden definir dos nuevos subproblemas a partir del subproblema 3. Como la variable $x_2 = 9/5$ no es entera, conviene buscar valores con las siguientes particiones de la región factible: $x_2 \leq 1$ y $x_2 \geq 2$. En otras palabras, se deben resolver los siguientes subproblemas:

Subproblema 4: Subproblema 3 + restricción: $x_2 \leq 1$

Subproblema 5: Subproblema 3 + restricción: $x_2 \geq 2$

Para el subproblema 4, los nuevos posibles óptimos son los puntos H e I, con valores de la función objetivo: $z_H = 37$ y $z_I = 365/9 = 40.556$. Entre los puntos A, B, H e I, el mejor valor se obtiene para el punto I con $x_1 = 40/9$ y $x_2 = 1$.

Respecto al subproblema 5 se observa que no existen puntos que satisfagan simultáneamente las restricciones del subproblema 3 y $x_2 \geq 2$, por lo que tiene solución imposible.

Como la solución óptima del subproblema 4 es superior a la cota, es necesario volver a ramificar, ya que eventualmente se podría encontrar una solución que sea menor o igual a $z = 365/9$, pero mejor que $z = 39$. En este caso, la variable no entera es $x_1 = 40/9$, por lo que conviene definir los siguientes subproblemas:

Subproblema 6: Subproblema 4 + restricción: $x_1 \leq 4$

Subproblema 7: Subproblema 4 + restricción: $x_1 \geq 5$

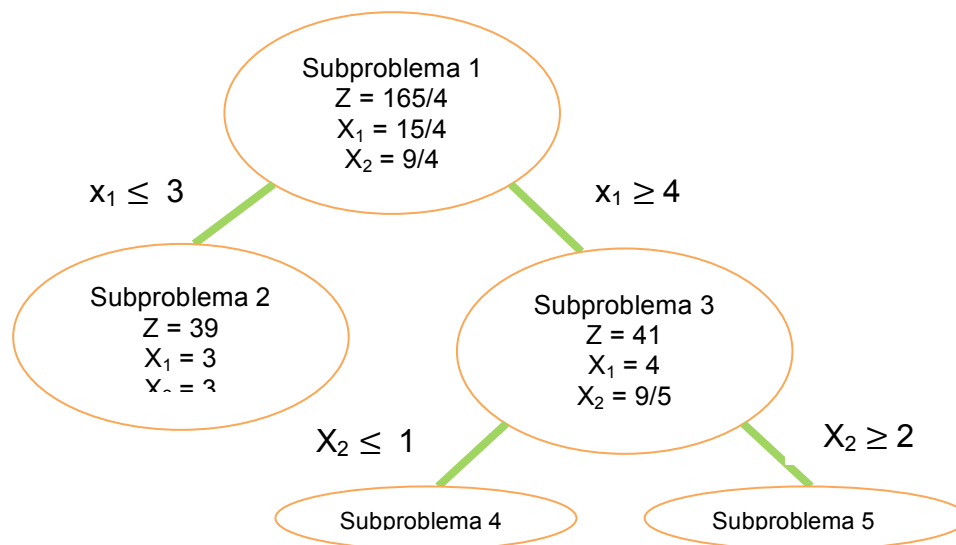


Gráfico 5.6. Árbol de ramificación subproblemas 4 y 5.

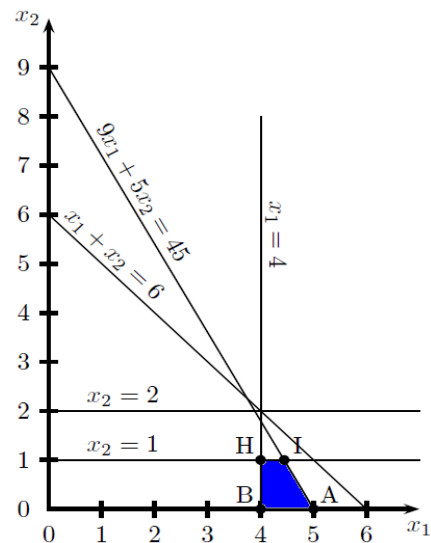


Gráfico 5.7. Región factible de los subproblemas 4 y 5.

En este caso, la región factible para el subproblema 6 se reduce al segmento de línea entre los puntos B y H, con valores para la función objetivo de: $z_B = 32$ y $z_H = 37$, por lo que el óptimo corresponde al punto H. Como en el punto H los valores de las variables son enteros, se podría pensar H como posible óptimo.

Sin embargo, el valor de la función objetivo en H es inferior a la cota definida previamente, por lo que se descarta. En el subproblema 7, el único punto que satisface todas las restricciones es el punto A, con valor de la función objetivo $z = 40$. Como en el subproblema 7 el valor de las variables es entero ($x_1 = 5$ y $x_2 = 0$) y dado que el valor de la función objetivo es mejor que la cota actual, 40 se transforma en la nueva cota. Como el subproblema 6 presenta un valor de la función objetivo inferior a la cota, no tiene sentido seguir ramificando, pues se ha alcanzado el óptimo del problema.

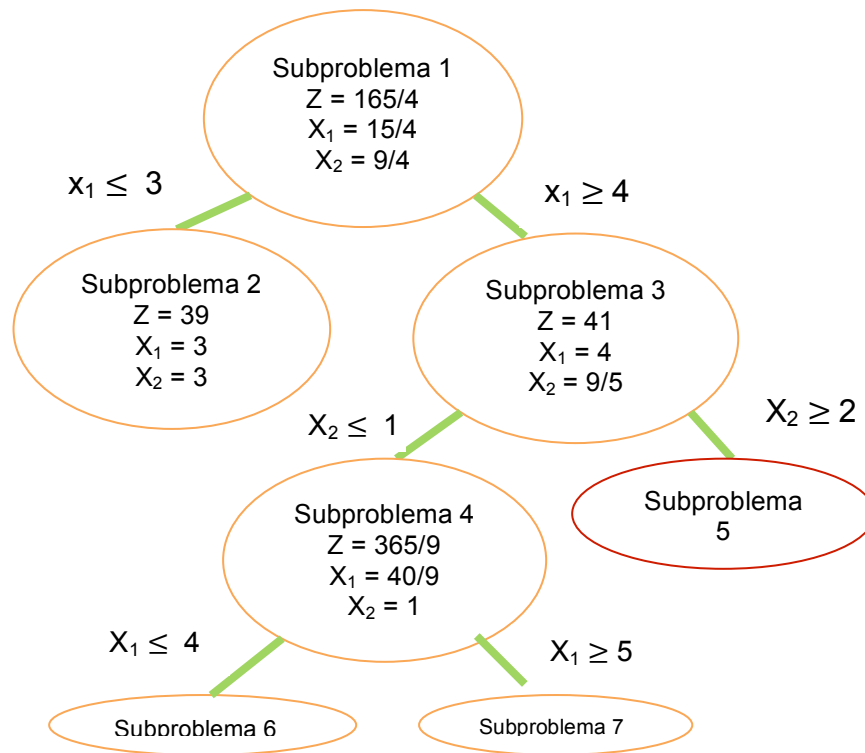


Gráfico 5.8. Árbol de ramificación subproblemas 6 y 7.

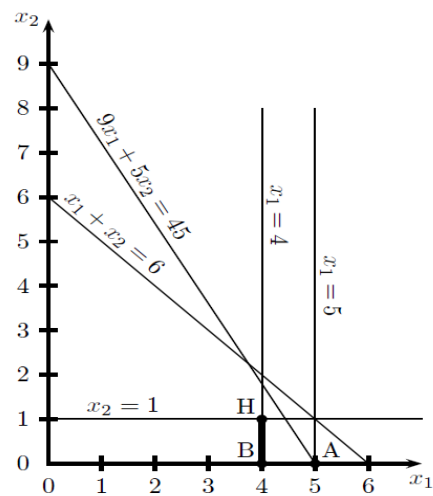


Gráfico 5.9. Región factible de los subproblemas 6 y 7.

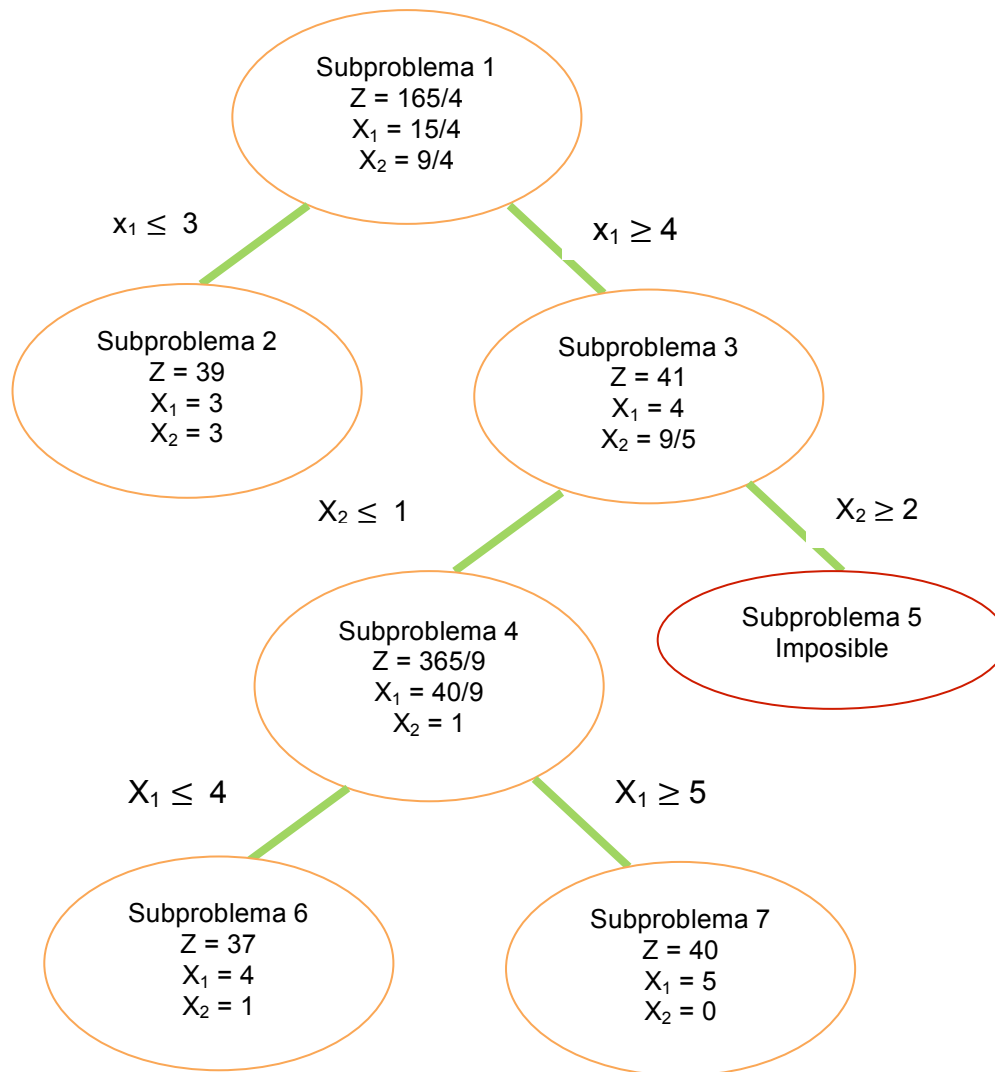


Gráfico 10. Árbol de ramificación final.

5.2.4 Método planos cortantes o algoritmo fraccional de Gomory

Divide la región factible en 2 regiones que no contienen la solución del modelo de programación lineal relajado y que sí contienen todas sus soluciones enteras factibles. Agregar restricciones a un modelo no puede producir un modelo con mejor solución Z.

Procedimiento para maximizar:

1. Resolver el modelo de programación entera relajado: si la solución es entera es la óptima.

2. Definir cotas superior e inferior:

Cota Superior (CS) = Modelo relajado

Cota Inferior (CI) = Redondeo factible

3. Ramificar.

4. Para cada nodo, resolver su modelo relajado y definir su cota superior y cota inferior.

Si solución es entera, o
Si solución es infactible, o

Ya no ramificar

Si $Z \leq CI$

más el nodo

5. Si ya no se puede ramificar la solución óptima es la del nodo con mejor solución entera.

6. Si se puede ramificar, volver al paso 3.

- La cota inferior es igual a la mejor solución entera hasta el momento.
- La cota superior en un nodo es igual a Z encontrado.
- A medida que se ramifica y se desciende del árbol la cota superior tiende a disminuir

Procedimiento para minimizar:

1. Cambiar la cota superior por la cota inferior.

2. Definir cotas superior e inferior:

Cota Superior (CS) = Redondeo factible

Cota Inferior (CI) = Modelo relajado

3. Para cada nodo:

Resolver su modelo relajado y definir su CS y CI

Si solución es entera
Si solución es infactible
Si $Z > CS$

Ya no ramificar más el nodo.

- CS es igual a la mejor solución entera hasta el momento.
- La CI en un nodo es igual a Z encontrado.
- A medida que se ramifica y se desciende del árbol la CI tiende a aumentar.

Ejemplo 7

Considerando:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 7x_1 + 9x_2 \\ \text{Sujeto a: } -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 &\text{ enteros no negativos} \end{aligned}$$

La solución óptima está dada por $Z = 63$, $x_1 = 9/2$ y $x_2 = 7/2$, la cual no es entera. El algoritmo de planos de corte cambia el conjunto del espacio de soluciones, de tal forma que los puntos extremos apropiados llegan a ser todos enteros. Este cambio debe hacerse sin partir ninguna de las soluciones enteras factibles del problema original.

5.2.5 Método (algoritmo) aditivo de balas

El método aditivo de Egon Balas, hace referencia a un procedimiento de enumeración que encuentra el óptimo de manera más eficiente, evaluando algunas soluciones.

Se deben poner todas las variables iguales a cero y luego asignar a una por una de las variables el valor 1. Posteriormente se reemplaza en cada una de las restricciones y se averigua la infactibilidad.

Paso 1. La función objetivo debe ser del tipo minimización, con todos los coeficientes no negativos.

Paso 2. Todas las restricciones deben ser de tipo entero con los lados derechos negativos de ser necesario. Después estas restricciones se convierten a ecuaciones, usando las variables auxiliares en el lado izquierdo de las restricciones.

Ejemplo 8

$$\text{MAX } Z = 3 Y_1 + 2 Y_2 - 5 Y_3 - 2 Y_4 + 3 Y_5$$

$$\text{Sujeta a: } \text{MIN } W = -3 Y_1 - 2 Y_2 + 5 Y_3 + 2 Y_4 - 3 Y_5$$

Con restricciones:

$$\text{Reemplazando: } Y_1 = 1 - X_1; Y_2 = 1 - X_2; Y_3 = X_3; Y_4 = X_4; Y_5 = 1 - X_5$$

$$\text{MIN } W' = 3 X_1 + 2 X_2 + 5 X_3 + 2 X_4 + 3 X_5 - 8$$

$$\text{Sustituyendo: } W' + 8 = W$$

$$\text{MIN } W = 3 X_1 + 2 X_2 + 5 X_3 + 2 X_4 + 3 X_5$$

El problema nuevo a resolver consiste en minimizar la función objetivo, teniendo en cuenta la medida de no factibilidad de la holgura. Cuando la infactibilidad da el menor valor, se continúa con el siguiente paso. Cuando la infactibilidad es cero, ésta corresponde a la solución óptima. Si existen varias infactibilidades iguales a cero, se reemplaza en la función objetivo y la respuesta estará dada por:

$X_1 = 0; X_2 = 0; X_3 = 0; X_4 = 0; X_5 = 0$ 0 1; 0 - 2; 0 - 1; Infactibilidad 3 o $X_1 = 0; X_2 = 0; X_3 = 0; X_4 = 0; X_5 = 0$ 0 2; 0 5; 0 - 12; Infactibilidad 12 o $X_1 = 0; X_2 = 0; X_3 = 0; X_4 = 0; X_5 = 0$ 0 2; 0 - 2; 0 5; Infactibilidad 2 o $X_1 = 0; X_2 = 0; X_3 = 0; X_4 = 0; X_5 = 0$ 0 0; 0 - 5; 0 - 1; Infactibilidad 6 o $X_1 = 0; X_2 = 0; X_3 = 0; X_4 = 0; X_5 = 0$ 0 - 1; 0 2; 0 2; Infactibilidad 1 o $X_1 = 0; X_2 = 0; X_3 = 0; X_4 = 0; X_5 = 0$ 0 2; 0 1; 0 2; Infactibilidad 0
 Solución Óptima Única $X^*1 = 0; X^*2 = 0; X^*3 = 0; X^*4 = 0; X^*5 = 1; W^* = 3$
 Solución Óptima Única para el problema original: $Y^*1 = 1; Y^*2 = 1; Y^*3 = 0; Y^*4 = 0; Y^*5 = 0; Z^* = 5$

5.3 Tipos de problemas

La programación entera puede resolver los siguientes problemas aplicando los métodos de solución vistos.

5.3.1 Problema asignación de capital

Ejemplo 9

Una empresa está considerando cuatro posibles inversiones. La opción 1 tiene asociado un valor actualizado neto (VAN) de US\$16.000; la opción 2 tiene un VAN de US\$22.000; la inversión 3 representa un VAN de US\$12.000 y la inversión 4 posee un VAN de US\$8.000. Cada inversión requiere un capital inicial de: US\$5.000, US\$7.000, US\$4.000 y US\$3.000, para las inversiones 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Actualmente la empresa dispone de US\$14.000 para invertir.

Determinar la forma de invertir el dinero de tal forma que se maximicen las utilidades. Las opciones son invertir o no en cada una de las posibilidades. Por lo tanto, conviene emplear variables de tipo binarias para indicar si se escoge cada opción:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se invierte en la opción } j \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad \forall j = 1 \dots 4$$

La función objetivo para el problema es (en miles):

$$\text{Max } Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

En la función objetivo se verifica que si la opción j se realiza, entonces $x_j = 1$ y se suma el VAN respectivo al valor de esta. En caso contrario, la variable $x_j = 0$ y no se contabiliza ese aporte. Se sigue la misma lógica para construir las restricciones.

Como existe un capital limitado de US\$14.000 para invertir, se debe satisfacer (en miles):

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

Como no existen otras restricciones, el modelo completo para el problema es:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{Sujeto a: } &5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ &x_j = \{0,1\} \quad \forall j \end{aligned}$$

Si se agregan las siguientes restricciones al problema original:

1. La empresa puede invertir en máximo dos opciones.
2. Si la empresa invierte en la opción 2, también debe invertir en la 1.
3. Si la empresa invierte en la 1, no puede tomar la opción 4.
4. Sólo se puede invertir en 3 si se escoge 1 o 2.

El planteamiento original del problema se ve modificado de la siguiente forma:

1. En este caso basta con agregar la restricción:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

2. Para incorporar esta restricción, se debe imponer que si $x_2 = 1$ necesariamente $x_1=1$.

$$x_2 \leq x_1 \text{ o } x_2 - x_1 \leq 0$$

Si $x_2 = 1$ necesariamente se tendría $x_1 = 1$. Si $x_2 = 0$, x_1 podría ser 0 o 1. Como no existen indicaciones, en ese caso se satisface el requerimiento de la nueva restricción.

3. Esta restricción impone la condición de que las alternativas 1 y 4 sean excluyentes, en otras palabras:

$$x_1 + x_4 \leq 1$$

Como las variables son binarias, no se permite que ambas puedan ser igual a 1.

4. La variable x_3 puede valer 1 sólo si x_1 o x_2 es igual a 1. No existen restricciones que digan que x_1 y x_2 sean excluyentes, por lo tanto y eventualmente se podrían escoger ambas. En este caso se puede agregar:

$$x_3 \leq x_1 + x_2$$

Luego, basta con tener un 1 a la derecha de la desigualdad para que x_3 pueda tomar valor igual a 1. Si se exigiera que debe escogerse 1 y 2 para poder seleccionar 3, la restricción quedaría:

$$2 \cdot x_3 \leq x_1 + x_2$$

En este caso se requiere tener un 2 a la derecha de la desigualdad para que x_3 pueda ser igual a uno.

5.3.2 Problema de costo fijo

Ejemplo 10

Una empresa produce tres tipos de prendas: poleras, shorts y pantalones. La fabricación de cada tipo de prenda requiere de maquinaria especializada. La maquinaria puede ser arrendada a los siguientes costos: US\$200, US\$150 y US\$100 al

mes en el caso de las poleras, shorts y pantalones, respectivamente. La fabricación de cada prenda requiere las cantidades de tela y mano de obra indicadas. Cada mes se dispone de 150 horas de mano de obra y 160 yd² de tela. Se debe maximizar el beneficio de la empresa.

Para plantear el modelo se pueden definir las siguientes variables:

x^1 = número de poleras producidas mensualmente.

x^2 = número de shorts producidos mensualmente.

x^3 = número de pantalones producidos mensualmente.

| | Mano de obra (hrs) | Tela (yd2) |
|-------------------|--------------------|------------|
| Poleras | 3 | 4 |
| Shorts | 2 | 3 |
| Pantalones | 6 | 4 |

Tabla 5.4. Requerimientos de producción

| | Precio de venta US\$ | Costo variable US\$ |
|-------------------|----------------------|---------------------|
| Poleras | 12 | 6 |
| Shorts | 8 | 4 |
| Pantalones | 15 | 8 |

Tabla 5.5. Precio de venta – Costo variable

Como el costo de arriendo de la maquinaria sólo depende de la prenda producida, sería necesario emplear variables binarias para cuantificar el hecho de arrendar o no cada máquina:

$y_i = 1$ se arrienda maquinaria para fabricar prendas tipo $i \quad \forall j = 1 \dots 3$
 0 en caso contrario

Para que el modelo funcione, se debe garantizar que:

$$\text{Si } x_i > 0 \quad y_i = 1$$

$$\text{Si } x_i = 0 \quad y_i = 0$$

Para ello, se deben incorporar las restricciones de activación de las variables binarias:

$$x_1 \leq M_1 y_1$$

$$x_2 \leq M_2 y_2$$

$$x_3 \leq M_3 y_3$$

Los valores M_i son valores escalares lo suficientemente grandes de forma que son una cota superior para el valor de x_i en el contexto del problema. La restricción anterior activa la variable binaria, ya que si $x_i > 0$, para que la restricción se pueda satisfacer, la variable binaria y_i debe ser exactamente igual a 1. En el caso que $x_i = 0$, la variable binaria y_i puede o no valer 1 sin afectar la satisfacción de la restricción, sin embargo, si la variable binaria valiera 1 se estaría considerando el costo de arriendo de una maquinaria que no se está empleando. Como el problema es de maximización de ganancias, si no es estrictamente necesario cuantificar un costo, el algoritmo de resolución se encargaría de hacer que la variable $y_i = 0$ en el óptimo.

La función objetivo corresponderá a la diferencia entre los ingresos por venta, menos los costos de producción, fijos y variables:

$$Z = \underbrace{(12x_1 + 8x_2 + 15x_3)}_{\text{Ingresos por venta}} - \underbrace{(6x_1 + 4x_2 + 8x_3)}_{\text{Costos variables}} - \underbrace{(200y_1 + 150y_2 + 100y_3)}_{\text{Costos fijos}}$$

Por lo tanto, la función objetivo a maximizar queda:

$$Z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

Ahora se deben construir las restricciones del problema. En este caso, existe una disponibilidad máxima de mano de obra y de tela. La restricción de mano de obra queda:

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$$

y la de tela sería:

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$$

Las restricciones anteriores permiten estimar el valor de M_i . Por ejemplo, si sólo se produjeran artículos de tipo 1, el valor máximo a producir quedaría controlado por: $\min \{150/3 \quad 160/4\}$, es decir, 40. Luego, basta con escoger $M_1 = 40$, pero en general podría ser cualquier valor mayor. En el caso de x_2 controla $160/3$ y para x_3 basta con $M_3 = 25$. En términos generales, los valores de M_i sólo deben ser lo suficientemente grandes para no restringir los valores de x_i por lo que se escogería arbitrariamente:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 100$$

De acuerdo a la selección anterior, el modelo final para el problema queda:

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

$$\text{Sujeto a: } 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$$

$$x_1 \leq M_1y_1$$

$$x_2 \leq M_2y_2$$

$$x_3 \leq M_3y_3$$

$$x_i \in Z \quad \forall j = 1 \dots 3$$

$$y_j = \{0,1\} \quad \forall j = 1 \dots 3$$

5.3.3 Problemas con restricciones de tipo si... entonces

En un modelo matemático puede ocurrir que si la restricción:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$$

se satisface, entonces la restricción:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

Si $f \leq 0$ la restricción $g \geq 0$ puede o no satisfacerse.

Para garantizar esta condición se pueden incorporar las siguientes restricciones:

$$-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1 - y)$$

$$y = \{0,1\}$$

El valor de M debe ser escogido de tal forma que si $f \cdot M$ y $yg \cdot M$ se asegure que todos los valores de x_1, x_2, \dots, x_n satisfagan las restricciones. Si la variable binaria vale cero, se tiene $f \leq M$, en particular $f > 0$. Por otro lado, si $y = 0$ se tiene $-g \leq 0$ o bien $g \geq 0$. En caso contrario, cuando $y = 1$ se tiene $f \leq 0$, es decir, no se puede cumplir que $f > 0$. Si $y = 1$ se tiene $-g \leq M$, es decir, se cumple si $g \geq 0$ o si $g < 0$.

En suma, si se satisface $f > 0$, la variable binaria debe valer 1 lo que obliga a satisfacer $g \leq 0$.

Ejemplo 11

Se tiene:

$$x_1 > 0 \quad x_2 = x_3 = 0$$

En forma equivalente se tiene:

$$\text{Si } x_1 > 0 \quad x_2 + x_3 \leq 0 \text{ o } -x_2 - x_3 \geq 0$$

De esta forma se incorpora:

$$x_2 + x_3 \leq M_y$$

$$x_1 \leq M(1 - y)$$

$$y = \{0,1\}$$

El valor de M no tiene por qué ser único. En este caso, se pueden emplear los valores de M_i calculados previamente:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &\leq (M_2 + M_3)y = 3200y \\ x_1 &\leq M_1(1 - y) = 2000(1 - y) \\ y &= \{0,1\} \end{aligned}$$

5.3.4 El modelo tipo “mochila”

Ejemplo 12

Una persona dispone de \$14.000 y desea escoger la mejor combinación entre cuatro alternativas de inversión:

| | Alternativa Inversión | VPN |
|---|-----------------------|-----------|
| 1 | \$ 5.000 | \$ 16.000 |
| 2 | \$ 7.000 | \$ 22.000 |
| 3 | \$ 4.000 | \$ 12.000 |
| 4 | \$ 3.000 | \$ 8.000 |

Tabla 5.6. Ejemplo 12

Sea: $X_j = 1$ si decide invertir en alternativa $j = 1,2,3,4$
 $= 0$ si no se decide invertir

$$\text{Máx } Z = 16 x_1 + 22 x_2 + 12 x_3 + 8 x_4$$

$$5 x_1 + 7 x_2 + 4 x_3 + 3 x_4 \leq 14$$

La solución del modelo binario indica la mejor combinación.

Formulación:

Objetivo: Incluir el máximo número de productos de distinto valor (c_j) en un espacio limitado (b)

$X_j = 1$ se incluye el artículo j en la mochila

0 no se incluye

$$\text{Máx } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Sujeto a. } x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b$$

5.3.5 Problema de producción

Ejemplo 13

Un fabricante de muebles de oficina produce dos tipos de escritorios: ejecutivos y secretariales. La compañía tiene dos plantas en las que fabrica los escritorios. La planta 1 es una planta antigua que opera con doble turno de 80 horas por semana. La planta 2 es una planta más nueva y no opera a su capacidad total. Cada turno de la planta 2 trabaja 25 horas por semana y la planta opera 2 turnos. La tabla abajo muestra el tiempo de producción (horas/unidad) y los costos estándar (\$/unidad) en cada planta. También se muestran los precios de venta de cada escritorio.

Debido a que la compañía ha estado experimentando un exceso de costos durante el último periodo presupuestal, los administradores han fijado una restricción semanal sobre los costos de producción.

El costo semifijo por producir en cada planta asciende a \$600 y \$900 para las plantas 1 y 2, respectivamente. Además, en caso de producir algún modelo de escritorio se debe asegurar una producción mínima de 100 unidades. El presupuesto semanal para la producción en miles de pesos también se muestra en la tabla. ¿Cuál es el número

óptimo de escritorios de cada tipo a producirse en cada planta con el objeto de maximizar las ganancias?

| Tipo | Tiempo Producción | | Costo estándar | | Precio | Presupuesto Semanal |
|---------|-------------------|----------|----------------|----------|--------|---------------------|
| | Planta 1 | Planta 2 | Planta 1 | Planta 2 | Venta | |
| Ejecut. | 7 | 6 | \$250 | \$260 | \$350 | \$2,000 |
| Secret. | 4 | 5 | \$200 | \$180 | \$275 | \$2200 |

Tabla 5.7. Ejemplo 12

Formulación:

X_{ij} : # escritorios de modelo $j = E, S$ a producir por semana en la planta $i = 1, 2$

Función objetivo:

$$\text{Max } Z = (350 - 250) X_{1E} + (275 - 200) X_{1S} + (350 - 260) X_{2E} + (275 - 180) X_{2S}$$

Restricciones de capacidad:

$$7X_{1E} + 4X_{1S} \leq 80 \text{ horas/semana} \quad \text{Planta 1}$$

$$6X_{2E} + 5X_{2S} \leq 50 \text{ horas/semana} \quad \text{Planta 2}$$

Restricciones de presupuesto:

$$250X_{1E} + 260X_{2E} \leq \$ 2000 \quad \text{Escritorios Ejecutivos}$$

$$200X_{1S} + 180X_{2S} \leq \$ 2200 \quad \text{Escritorios Secretariales}$$

Restricciones de No-Negatividad:

$$X_{1E}, X_{1S}, X_{2E}, X_{2S} \geq 0$$

Nuevas variables y restricciones:

Binaria $Y_i = 1$ se produce en la planta $i = 1, 2$
 0 no se produce

Binaria $Y_j = 1$ se producen escritorios del modelo $j = E, S$
 0 no se producen

Decisión de producción en cada planta:

$$7X_{1E} + 4X_{1S} \leq 80 \quad y_1 \quad \text{Planta 1}$$

$$6X_{2E} + 5X_{2S} \leq 50 \quad y_2 \quad \text{Planta 2}$$

Decisión de producir cada modelo:

$$100 y_E \leq X_{1E} + X_{2E} \leq M y_E \quad \text{Escritorios ejecutivos}$$

$$100 y_S \leq X_{1S} + X_{2S} \leq M y_S \quad \text{Escritorios secretariales}$$

Función objetivo modificada:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & (350 - 250) X_{1E} + (275 - 200) X_{1S} + (350 - 260) X_{2E} + (275 - 180) X_{2S} \\ & - 600 y_1 - 900 y_2 \end{aligned}$$

5.3.6 Problema de distribución

Ejemplo 14

Una compañía tiene tres localizaciones alternativas para ubicar nuevos almacenes que den servicio a la región norte del país. Existen 5 clientes (C1, C2, C3, C4, C5) importantes en esta región. Se desea determinar en cuáles localizaciones se instalarán almacenes como puntos de distribución para surtir a los clientes.

| Localización | \$ Instalación | Capacidad | Costos Unitarios de Transporte a Cliente | | | | |
|-------------------|----------------|-----------|--|------|------|-----|------|
| | | | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
| 1 | \$50,000 | 200 | \$8 | \$10 | \$12 | \$6 | \$8 |
| 2 | \$30,000 | 150 | \$7 | \$9 | \$11 | \$9 | \$13 |
| 3 | \$40,000 | 300 | \$8 | \$11 | \$10 | \$8 | \$7 |
| Demanda/Cliente : | | | 75 | 50 | 35 | 75 | 35 |

Tabla 5.8 Costos unitarios de transporte a cliente.

X_{ij} : # unidades a transportar del almacén $i = 1, 2, 3$ a cliente $j = 1, 2, 3, 4, 5$

$Y_i = 1$ se instalará el almacén en localización $i = 1, 2, 3$

0 no se instalará

$$\text{Min } Z = 8x_{11} + 10x_{12} + 12x_{13} + \dots + 8x_{34} + 7x_{35} + \\ 50000y_1 + 30000y_2 + 40000y_3$$

Restricciones de demanda:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 75 \quad (\text{cliente 1})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 50 \quad (\text{cliente 2})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 35 \quad (\text{cliente 3})$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 75 \quad (\text{cliente 4})$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 35 \quad (\text{cliente 5})$$

Restricciones de capacidad:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 200 y_1 \quad (\text{almacén 1})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 150 y_2 \quad (\text{almacén 2})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 300 y_3 \quad (\text{almacén 3})$$

No negatividad: $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{35} \geq 0$

Resumen

La programación entera está relacionada con la solución de problemas de programación matemática, en los cuales algunas o todas las variables sólo pueden tomar valores enteros o negativos. Un programa entero se denomina mixto o puro, dependiendo de si algunas o todas las variables están confinadas a valores enteros. Si en ausencia de las condiciones de integridad o totalidad las funciones de objetivo y de restricciones son lineales, el modo resultante se denomina programación lineal entero.

Los modelos de programación entera contienen restricciones y una función objetivo idéntica a la formulada por la planeación lineal.

Bibliografía

- Bronson, R. (1993). Investigación de operaciones, México, Editorial McGraw-Hill.
- Chediak, F. (2005). Investigación de operaciones, Colombia Ibagué, Editorial El Poirá.
- Izar, J. (2012). Investigación de operaciones, México, Editorial Trillas.
- Roscoe, D.(1984). Modelos cuantitativos para administración, México, Editorial Iberoamérica.
- Lieberman,G. (2002). Investigación de operaciones. México, Editorial McGraw-Hill.
- Taha, H. (2008). Investigación de operaciones, México, Editorial Alfa omega.
- Winston, W. (2005). Investigación de operaciones, México, Editorial Thomson.
- http://www.investigacion-operaciones.com/Curso_inv-Oper_carpeta/Clase17.pdf
- http://www.ulpgc.es/hege/almacen/download/14/14958/programacion_enter.pdf
- <http://www.uv.es/~sala/Clase14.pdf>
- http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_leg/ing_info/io/doc_gerenerica/archivos/pe.pdf
- http://www.alumnos.inf.utfsm.cl/~vpena/ramos/ili292/apuntes/entera_s2_2003.pdf