EL PROBLEMA DEL CAMINO DE MÍNIMO COSTO

Un grafo es un par de conjuntos, V y E, de los cuales el primero contiene los vértices o nodos y el segundo es el conjunto de ramas o arcos y está formado por pares de elementos de V que se conectan entre sí. Usualmente un grafo se puede denotar como:

$$\mathbf{G = (V,E)}$$

Se dice que un grafo es dirigido cuando los elementos (u,v) ϵ E son pares ordenados. De esta forma las ramas se pueden notar como u $\longrightarrow$ v.

Un grafo es acíclico cuando no forma ciclos, es decir, no existe ningún camino que comience y termine en el mismo vértice.

El problema de hallar el camino de costo mínimo en un grafo dirigido, es un caso específico de lo que se llama problema de decisión en múltiples pasos. La formulación general de este problema es la siguiente:

Un juicio es vigilado, habitualmente, a tiempos t = 0,1, ... Como resultado de dicha evaluación se consigue el importe de una variable (o, eventualmente, un vector de variables) X que sirve para calificar la situación del juicio. Al par u = (t, x(t)) se le conoce como estado.

Después de cada observación de X debe aplicar una acción correctiva, tomada de un conjunto de posibles disposiciones D(u). La escogencia de una medida particular d(u) da como resultado una transformación T que da como consecuencia un nuevo estado: v = (t + 1, ˜x) = T(u, d), y que tiene incorporado un costo c(u, d). Una situación que indique para cada estado u una decisión concreta a establecer recibe el nombre de política. Se pretende encontrar una política, de tal manera que la suma de los costos de las transformaciones engendradas por las continuas decisiones sea mínima (su resultado), y recibe el nombre de política óptima.

En el problema del camino de mínimo costo, los nódulos del grafo desempeñan el papel de estados. Así, para cada u ∈ V, el acumulado D(u) de las optativas decisiones está conformado por los vértices v tales que (u, v) ∈ E, mientras que las transformaciones engendradas por una decisión son las ramas (u, v) ∈ E, y el costo de la transformación es el costo de la rama. Una política es, en este caso, una regla que indica a qué nodo pasar si se está en un vértice dado cualquiera, siendo la política óptima aquella que da, para cada u ∈ V un camino de costo mínimo que finalice en un vértice terminal.

A continuación se observa un grafo con los costos correspondientes de ir de un origen i a un destino j.

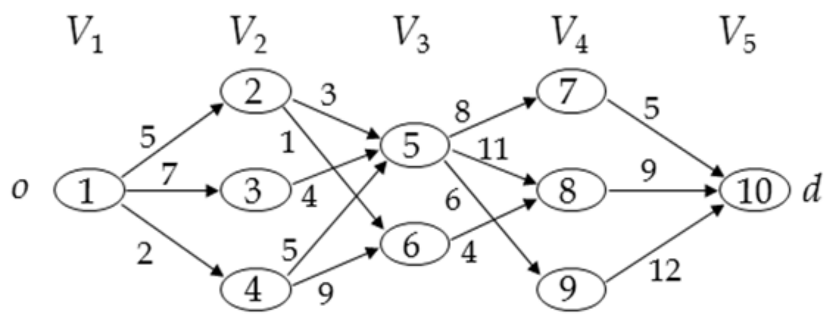

Gráfico 4.1. Grafo multietapa

Se denota por c(u,v) el costo del arco (u,v).

Se debe hallar un camino de costo mínimo que vaya del nódulo 0 al nódulo d.

Cada Vi define una etapa del grafo por lo que todo recorrido del nódulo 0 al nódulo d tiene exactamente un vértice en cada Vi.

Ejemplo

Maximizar el beneficio total asignando el recurso a los r proyectos cuando se dispone de n unidades de un recurso que deben asignarse a r proyectos. Se conoce que si se dan j unidades ($0 \leq j \leq n$) al proyecto i resulta un beneficio Ni,j.

Primero se formulará como grafo multietapa:

- r+1 es el número de etapas.
- El proyecto i está representado por la etapa i, $1 \leq i \leq$ r.
- En cada etapa i, $2 \leq i \leq r$ hay n+1 vértices $v_{i,j}$, $0 \leq j \leq n$.
- Los vértices de las etapas 1 y r+1 son respectivamente, $o=v_{1,0}$ y $d=v_{r+1,n}$.
- Representa el estado en el que se dan un total de j unidades del recurso a los proyectos 1, 2, ..., i-1 (vértice $v_{i,j}$, $2 \leq i \leq r$).
- Para todo $j \leq l$ y $1 \leq i < r$ los arcos son de la forma $(v_{i,j},v_{i+1,l})$.
- El costo asignado $N_{i,l-j}$ al arco $(v_{i,j},v_{i+1,l})$, $j \leq l$, corresponde a asignar l-j unidades del recurso al proyecto i, $1 \leq$ i < r.
- El costo $N_{i,l}$ es asignado a los arcos de la forma $(v_{r,j},v_{r+1,n})$.

Segundo, se formulará como grafo resultante para r=3 y n=4.

- El camino de costo máximo del nódulo o al nódulo d definirá la asignación óptima.
- Al cambiar los signos de las etiquetas, el convertir a en un problema de camino de costo mínimo cambiar los signos de las etiquetas.

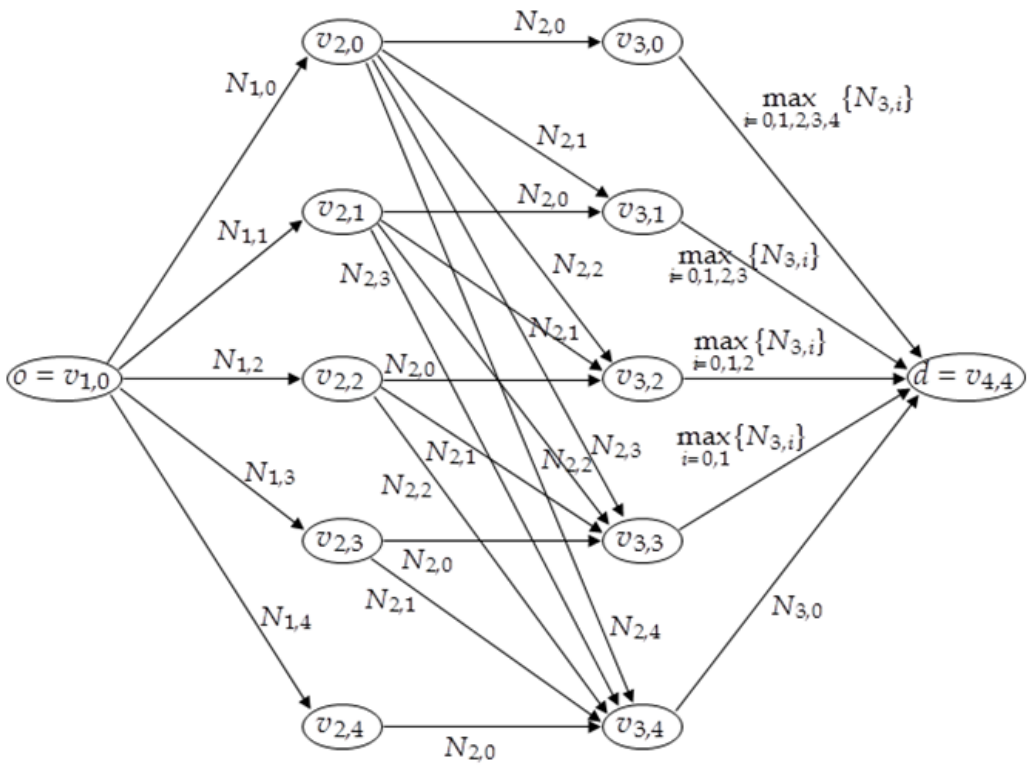

Gráfico 4.2. Formulación grafo multietapa

Solución:

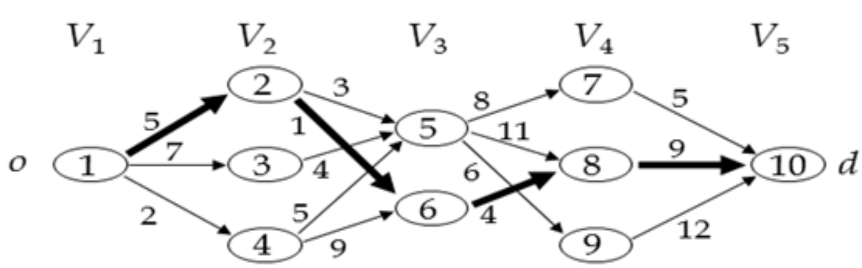

Gráfico 4.3. Solución grafo multietapa.

- Cada camino del nódulo o al nódulo d es el producto de una cadena de k-2 decisiones.

- Decisión i-ésima: determinar, a partir de un vértice vi de Vi, un arco que tenga como origen a vi y algún nódulo como destino a Vi+1.

- Principio de optimalidad: El camino de costo mínimo debe contener caminos después del camino de costo mínimo, entre otros nódulos.

Ecuación de recurrencia hacia adelante:

Sea s(i,j) un camino de costo mínimo C*(i,j) desde el vértice j del conjunto Vi hasta el vértice destino d.

Entonces:

$$C(k-1,j) = \begin{Bmatrix} c\ (j,d), & si\ (j,d) \in A \\ \infty & en\ otro\ caso \end{Bmatrix}$$

$$C(i,j) = \min_{\substack{t \in V_{i+1} \\ (j,t) \in A}} \{c\ (j,1) + \ C(i+1,l)\}, para\ 1\ \leq i \leq k-2$$

$$C(3{,}5) = \min\{8 + C(4{,}7), 11 + C(4{,}8), 6 + C(4{,}9)\} = 13$$
$$C(3{,}6) = 4 + C(4{,}8) = \ 13$$
$$C(2{,}2) = \min\{3 + C(3{,}5), 1 + C(3{,}6)\} = 14$$

$$C(2{,}3) = 4 + C(3{,}5) = \ 17$$
$$C(2{,}4) = \min\{5 + C(3{,}5), 9 + C(3{,}6)\} = 1\,8$$
$$C(1{,}1) = \min\{5 + C(2{,}2), 7 + C(2{,}3), 2 + C(2{,}4)\} = 19$$

Falta recolectar las decisiones creadas en cada etapa que minimizan el costo:

- El valor de l que minimiza $c\ (j,l) + \ C * (i+1,l)$ es D(i,j)
- Entonces, el camino de costo mínimo es:
  v1=1; v2=D(1,1); v3=D(2,D(1,1))…………; etc.

D (3,5) = 7;
D (3,6) = 8
D (2,2) = 6
D (2,3) = 5
D (2,4) = 5
D (1,1) = 2
V1 = 1
V2 = D (1,1) = 2
V3 = D (2,D(1,1)) = 6
V4= D (3, D(2, D(1,1))) = 8