UNIDAD 2. CADENAS DE MARKOV

Cadenas de Markov.

Tabla de contenido

Introducción

Es común ver en el espacio público un porcentaje de personas que fuman y otras que no lo hacen. Cabe la posibilidad de que aquellos que no fuman más adelante sí lo hagan y los que actualmente fuman dejen el cigarrillo. Esta sucesión de observaciones con determinado número de resultados, cada uno de los cuales tiene una probabilidad, depende sólo del resultado de la etapa inmediatamente anterior. Este proceso en el que intervienen variables aleatorias indexadas en el tiempo se denomina **cadenas de Markov**, haciendo honor al matemático ruso Andrei Andreyevich Markov, quien creó este método. De esta forma la probabilidad de ocurrencia de un evento depende del evento anterior.

Objetivos

Objetivo general

Emplear las cadenas de Markov como una herramienta de resolución para situaciones relacionadas con procesos estocásticos.

Objetivos específicos

- Reconocer las generalidades de una cadena de Markov.
- Identificar las características de un proceso estocástico markoviano.
- Clasificar de forma general las cadenas de Markov.
- Formular modelos soportados en cadenas de Markov.

2.1 ¿Qué es una cadena de Markov?

Una cadena o modelo de Markov es una herramienta para analizar procesos en que la sucesión de variables aleatorias evolucionan en función de otra variable. Dichas variables o conjunto de variables que tienen efectos aleatorios, reciben el nombre de proceso estocástico. La inserción de este método a las matemáticas se le atribuye a Andrei Andreyevich Markov.

Una cadena de Markov es una secuencia $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de variables aleatorias. El valor de X_n es el estado del proceso en el tiempo *n*. De esta manera se obtiene la propiedad markoviana:

$$P\left(X_{n+1} = X_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1,\ldots,} X_2 = x_2, X_1 = x_1\right) = P\left(X_{n+1} = X_{n+1} \mid X_n\right)$$

Donde x_i es el estado del proceso en el instante *i*.

¿Quién fue Andrei Markov Andreyevich?

Andrei Markov Andreyevich nació el 2 de junio de 1856 en Riazán, Rusia. Markov fue uno de los más famosos discípulos de Chebyshev y sus ideas se basaban en representar la probabilidad como una ciencia matemática exacta y práctica.

La introducción de la cadena de Markov como un modelo para el estudio de variables aleatorias fue uno de los aportes más representativos a las matemáticas.

Markov también escribió un libro de texto de estadística y probabilidad. Su obra influyó en muchos otros famosos matemáticos y estadísticos, incluyendo SN Bernstein, Romanovsky VI, y Jerzy Neyman.

Después de contribuir en gran medida a la teoría de números, análisis, cálculo de diferencias finitas, teoría de la probabilidad (con las cadenas de Markov) y las estadísticas, murió en Petrogrado (San Petersburgo antes, ahora Leningrado), el 20 de julio de 1922.

Cadenas homogéneas y no homogéneas

Una cadena de Markov es *homogénea* si la probabilidad de ir del estado i al estado j en un paso no depende del tiempo en el que se encuentra la cadena, es decir:

$$P\ (X_n = j \mid X_{n-1} = i\ ) = P\ (X_1 = j \mid X_o = i\ )$$

Para todo n y para cualquier i, j.

Si para alguna pareja de estados y para determinado tiempo n, la propiedad antes mencionada no se cumple se puede decir que la cadena de Markov es *no homogénea*.

2.2 Probabilidades y matriz de transición

La probabilidad de ir del estado *i* al estado *j* en *n* unidades de tiempo está dada por:

$$P_{ij}^{(n)} = Pr\ (X_n = j \mid X_0 = i\ )$$

En la probabilidad de transición, en un paso, se omite el superíndice y de esta forma se obtiene:

$$P_{ij} = Pr\ (X_1 = j \mid X_0 = i\ )$$

Las probabilidades de transición en n pasos satisfacen la ecuación de Chapman-Kolmogorov, es decir, para cualquier *k* tal que 0 < *k* < *n* se cumple que:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in E} p_{ir}^{(k)}\ p_{ij}^{(n-k)}$$

Donde E denota el espacio de estados.

Cuando la cadena de Markov es homogénea, muchas de sus propiedades se pueden obtener a través de su matriz de transición, definida, entrada a entrada, como:

$$A_{i,j} = P_{ij}$$

En donde la entrada i, j corresponde a la probabilidad de ir del estado i a j en un paso.

De la misma manera se puede obtener la matriz de transición en n pasos como:

$$A_{i,j}^{(n)} = P_{ij}^{(n)}\ \text{, donde } P_{ij}^{(n)} = P\ (X_n = j \mid X_0 = i\ )$$

Una matriz de transición para una cadena de Markov de n estados es una matriz de n X n con todos los registros no negativos y con la propiedad adicional de que la suma de los registros de cada columna (o fila) es 1.

Los P_{ij} se agrupan en la matriz de transición de la cadena de Markov, de tal forma que:

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = (P_{ij})\ i,j\ \in S$$

Ejemplo 1

Las siguientes matrices son de transición.

$$\begin{bmatrix} 0.80 & 0.20 & 0.00 \\ 0.18 & 0.75 & 0.16 \\ 0.02 & 0.05 & 0.84 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.70 & 0.30 \\ 0.50 & 0.50 \end{bmatrix}$$

2.3 Representación gráfica de una matriz de transición

Las probabilidades de un estado a otro se pueden representar a través de un diagrama de transición de estados, el cual es un grafo dirigido en donde los nodos son los estados de la cadena de Markov y cuyos arcos se deben etiquetar con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es cero, no se pone arco.

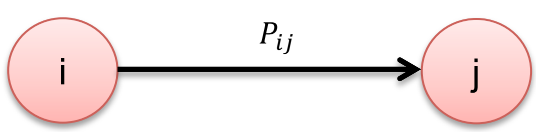

Figura 2.1 Representación gráfica de una matriz de transición

Propiedades:

- La suma de las probabilidades de los estados debe ser igual a 1.

- La matriz de transición debe ser cuadrada, es decir, debe tener el mismo número de filas y columnas.
- Las probabilidades de transición deben estar entre 0 y 1.

A continuación se desarrollarán varios ejemplos para comprender el significado de una cadena de Markov, una matriz de transición y las probabilidades de transición.

Ejemplo 2

Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades: Bucaramanga, Cali y Pereira. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y al día siguiente se desplaza a otra ciudad, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en Pereira, la probabilidad de tener que seguir trabajando allí al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a Cali es 0.4 y la de tener que ir a Bucaramanga es 0.2. Si el viajante duerme un día en Cali, con probabilidad de un 20%, tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente; en el 60% de los casos viajará a Pereira, mientras que irá a Bucaramanga con probabilidad de 0.2. Por último, si el agente comercial trabaja todo un día en Bucaramanga, permanecerá en esa misma ciudad al día siguiente con una probabilidad de 0.1, irá a Cali con una probabilidad de 0.3 y a Pereira con una probabilidad de 0.6.

a) Si hoy el viajante está en Pereira, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en el mismo lugar al cabo de cuatro días?

b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

Solución:
La matriz de transición P es la siguiente para el orden Bucaramanga, Cali y Pereira.

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Para solucionar la primera pregunta se debe averiguar el término P_{33}^4, es decir, el término que ocupa la tercera fila y la tercera columna de la matriz P^4, lo cual se obtiene con la fila 3 y columna 3 de P^2, cuyos valores son:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/100 & 33/100 & 12/25 \\ 9/50 & 17/50 & 12/25 \\ 9/50 & 3/10 & 13/25 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^2 * P^2 = \begin{bmatrix} 19/100 & 33/100 & 12/25 \\ 9/50 & 17/50 & 12/25 \\ 9/50 & 3/10 & 13/25 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 19/100 & 33/100 & 12/25 \\ 9/50 & 17/50 & 12/25 \\ 9/50 & 3/10 & 13/25 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \frac{9}{50} * \frac{12}{25} + \frac{3}{10} * \frac{12}{25} + \frac{13}{25} * \frac{13}{25} = 0.0864 + 0.1440 + 0.2704 = \mathbf{0.5008}$$

En la segunda pregunta, para hallar las probabilidades estacionarias, se debe proceder de la siguiente manera:

$$(x \quad y \quad z) \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = (x \quad y \quad z);\ x + y + z = 1$$

Desarrollando resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{gathered} -9x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 8y + 4z = 0 \\ 6x + 6y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{gathered}$$

Se elimina ***y*** en las dos primeras -33 x + 12 z = 0 y se elimina ***y*** en las dos últimas: 12 z = 6; de ambas se deduce que x = 2/11 = 0.1818; y = 7/22 = 0.3181; z = 0.5, es decir:

Bucaramanga = 18%
Cali = 32%
Pereira = 50%

Ejemplo 3

La empresa Éxito Móvil decidió hacer un estudio para analizar el comportamiento de su nuevo competidor Virgin, ya que piensa que el cambio de marca puede modelarse como una cadena de Markov, incluyendo tres estados. Los estados E y V representan a los clientes que emplean las marcas mencionadas y el estado D representa todas las demás marcas de móviles. Los datos se toman cada mes y se ha construido la siguiente matriz de transición de los datos históricos:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{E} & \text{V} & \text{D} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.75 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{V} \\ \text{D} \end{array} \end{array}$$

¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos marcas grandes?

Solución:

El problema consiste en resolver el sistema formado por las siguientes ecuaciones: (x.y.z). P = (x,y,z); x + y + z = 1, siendo x la probabilidad de que el cliente emplee E, y de que el cliente emplee V y z que el cliente emplee D. Se obtiene el siguiente sistema:

$$(x \quad y \quad z)\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.75 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} = (x \quad y \quad z);\ x + y + z = 1$$

Resolviendo la matriz se obtiene:

$$\begin{aligned} -3x + 2y + z &= 0 \\ 20x - 25y + 10z &= 0 \\ 10x + 5y - 20z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Cuya solución es: x = 9/16; y = 10/26; z = 7/26

Ejemplo 4

El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirán al mes siguiente. En una población de 1.000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes, ¿cuántos lo comprarán al siguiente mes? y ¿dentro de dos meses?

Solución:

$$P^0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$(C, N) = (100 \quad 900)\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix} = (350, 650)$$

El primer mes comprarán C = 350 y no comprarán N = 650

$$P^2 = \begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.45 & 0.55\end{bmatrix}$$

$$(C, N) = (100 \quad 900)\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.45 & 0.55\end{bmatrix} = (475, 525)$$

El segundo mes comprarán C = 475 y no comprarán N = 525

Vector de probabilidad invariante
Un vector de probabilidad (finito o infinito numerable) es invariante para una cadena de Markov si:

$$v\,P = v$$

Donde P es la matriz de transición de la cadena de Markov. Al vector de probabilidad invariante también se le llama *distribución estacionaria* o *distribución de equilibrio*.

2.4 Conceptos generales

Las cadenas de Markov están caracterizadas por unos tiempos de entrada, recurrencia de sus estados y una periodicidad, conceptos importantes que describen el comportamiento del sistema.

Tiempos de entrada:

Si $C \subset E$, se define el primer tiempo de entrada a C como la variable aleatoria

$$T_C = \begin{cases}\min\{n > 0 \;\; X_n \in C\} & si\,\{n > 0 \;\; X_n \in C\} \neq \emptyset \\ \infty & si\,\{n > 0 \;\; X_n \in C\} = \emptyset\end{cases}$$

T_c denota la primera vez que la cadena entra al conjunto de estados C.

Recurrencia:
En una cadena de Markov con espacio de estados **E**, si x∈**E** se define:

$$L_x = P\,(X_n = x\; para\; algun\; n \in N \mid X_0 = x)$$

X es estado recurrente si $L_x = 1$

X es transitorio si $L_x < 1$

X es absorbente si $P_{x,x} = 1$

Periodicidad:

El *periodo* de un estado x∈**E** se define como:

$$d(x) = mcd\left\{n: P_{x,x}^{(n)} > 0\right\}$$

Donde mcd es el máximo común divisor.

d(x) > 1 quiere decir que x es periódico de periodo x. El estado x será periódico de periodo d(x) > 1 si existen caminos que llevan desde x hasta x, pero todos tienen longitud mx con mx > 0.

Si d(x)=1 se dice que x es un estado *aperiódico*.

Una cadena de Markov es *aperiódica* si todos sus estados son *aperiódicos*.

Ejemplo 5

En la siguiente cadena de Markov todos los estados son periódicos de periodo d(x) = 3

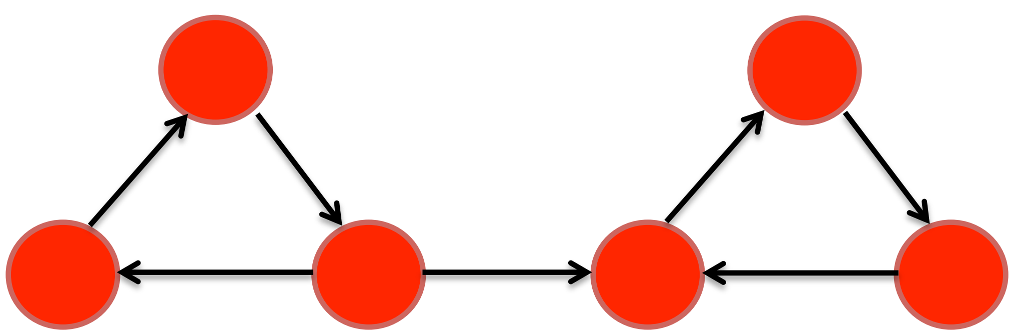

Figura 2.2. Estados periódicos en una cadena de Markov.

2.5 Tipos de cadenas de Markov

Cadenas irreducibles

Una cadena de Markov es *irreducible* si cumple con cualquiera de las siguientes condiciones (equivalentes entre sí):

1. Desde cualquier estado de **E** se puede acceder a cualquier otro.
2. Todos los estados se comunican entre sí.
3. C(x)=**E** para algún x∈**E**.
4. C(x)=**E** para todo x∈**E**.
5. El único conjunto cerrado es el total.

Cadenas positivo-recurrentes

Una cadena de Markov es *positivo-recurrente* si todos sus estados son positivo-recurrentes. Si la cadena es irreducible existe un único vector de probabilidad invariante y está dado por:

$$\pi_x = \frac{1}{\mu_x}$$

Cadenas regulares

Una cadena de Markov es *regular* (también *primitiva* o *ergódica*) si existe alguna potencia positiva de la matriz de transición cuyas entradas sean todas estrictamente mayores que cero.

Cuando el espacio de estados **E** es finito, si **P** denota la matriz de transición de la cadena se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} P^n = W$$

Donde W es una matriz con todos sus renglones iguales a un mismo vector de probabilidad **w**, que resulta ser el vector de probabilidad invariante de la cadena. En el caso de cadenas regulares, este vector invariante es único.

Cadenas absorbentes

Una cadena de Markov con espacio de estados finito se llama absorbente si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La cadena tiene al menos un estado absorbente.
2. De cualquier estado no absorbente se accede a algún estado absorbente.

Si se denota como **A** al conjunto de todos los estados absorbentes y a su complemento como **D**, se obtienen los siguientes resultados:

Su matriz de transición siempre se puede llevar a una de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Donde la submatriz Q corresponde a los estados del conjunto D, I es la matriz identidad, 0 es la matriz nula y R alguna submatriz.

$$P_X(T_A < \infty) = 1$$

Esto quiere decir que no importa en dónde se encuentre la cadena, eventualmente terminará en un estado absorbente.

Ejemplo 6

En un juego participan dos jugadores, A y B. En cada turno se lanza una moneda al aire. Si sale cara, A le da 1 a B, si sale sello B le da 1 a A. Al principio A tiene 3 y B tiene 2. El juego termina hasta que uno de los dos fracase.

Se debe calcular:

- La probabilidad de fracaso de A.
- La probabilidad de fracaso de B.
- El número medio de tiradas que tarda en acabar el juego.

Se tendrá una cadena con un estado por cada posible estado de cuentas de A:S = {1,2,3,4,5,0}. Descomponiendo P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando cálculos se obtiene:

$$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1.2 & 0.8 & 0.4 \\ 1.2 & 2.4 & 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1.6 & 2.4 & 1.2 \\ 0.4 & 0.8 & 1.2 & 1.6 \end{bmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1}\text{R} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

- **Probabilidad de fracaso de A**
  El fracaso de A está representado por el estado 0, que es el segundo estado absorbente. Como se empezó en el tercer estado transitorio (A empieza con 3), se debe consultar la tercera fila, segunda columna de $(I-Q)^{-1}$ R, que da una probabilidad de 0.4 de que A empiece con 3 y fracase.

- **Probabilidad de fracaso de B**
  Como es el suceso contrario su probabilidad será 1 – 0.4 = 0.6. También se puede consultar la tercera fila, primera columna de $(I-Q)^{-1}$ R.

- **Número medio de tiradas que tarda en acabar el juego**
  Se suman los números medios de etapas que se estarán en cualquier estado transitorio antes de la absorción, suponiendo que se empieza en el tercer estado transitorio. Dichos números medios son los que forman la tercera fila de la matriz $(I-Q)^{-1}$. El promedio es: 0.8 + 1.6 + 2.4 + 1.2 = 6 tiradas.

- **Cadenas ergódicas**
  Una cadena de Markov es ergódica si es irreducible, recurrente y aperiódica.

Ejemplo 7

Se tiene la siguiente matriz de transición con S = $\{a, b, c, d, e\}$:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{e} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \\ \text{d} \\ \text{e} \end{array}$$

1. Se dibuja el diagrama de transición de estados.

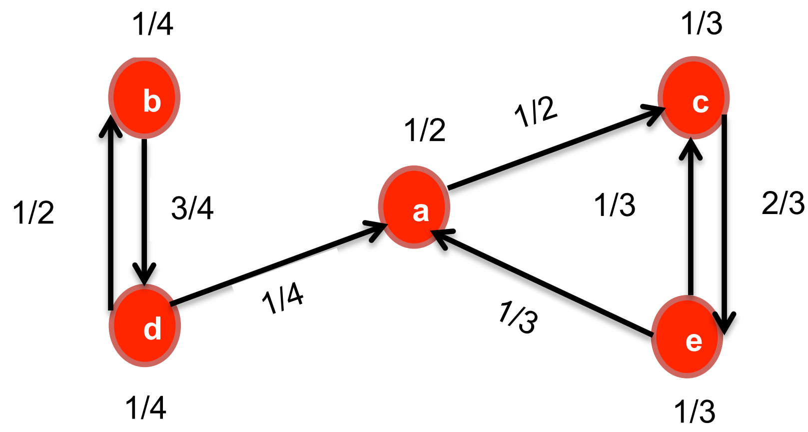

Figura 2.3. Diagrama de transición de estados

2. Se hallan los conjuntos cerrados
   Con un estado i, se construye un conjunto cerrado C_i, con todos los alcanzables desde él en una o más etapas (el propio i también se pone):

   $C_a = \{a, c, e\} = C_e$

   $C_b = \{b, d, a, c, e\} = C_d = S$

   La cadena de Markov no será irreducible porque C_a, es un subconjunto propio cerrado de S.

3. Se clasifican los estados
   Recurrentes: a, c, e
   Transitorios: b,d
   Periódicos: ninguno
   Absorbentes: ninguno

4. Se reorganiza la matriz. Dada una matriz finita, se podrán agrupar los estados recurrentes por un lado y los transitorios por otro:

$$P = \begin{bmatrix} Movimientos\ entre\ recurrentes & 0 \\ Paso\ de\ transitorios\ a\ recurrentes & Movimeintos\ entre\ transitorios \end{bmatrix}$$

Con el nuevo orden se tendría:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & c & e & b & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. Se clasifica la cadena. No es irreducible, por lo cual no será periódica, ni aperiódica, ni recurrente, ni transitoria, ni ergódica.

Para esclarecer los conceptos se tienen los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 8

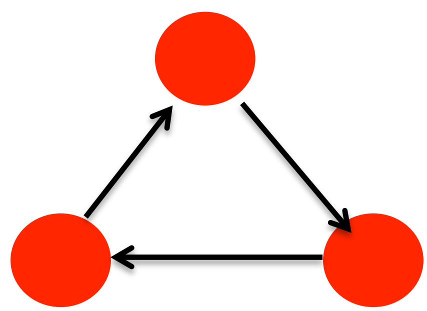

Figura 2.4 Cadena irreducible, recurrente, periódica de periodo 3 y no ergódica.

Ejemplo 9

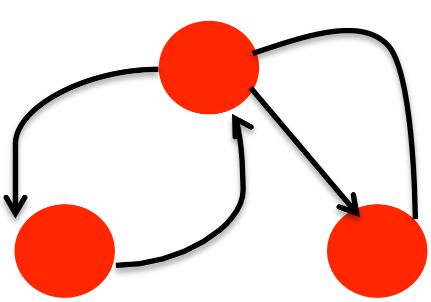

Figura 2.5. Cadena irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica.

2.6 Cadenas de Markov en tiempo continuo

En algunos casos en los que se requiere un parámetro de tiempo continuo, porque la evolución del proceso se está observando de manera continua a través del tiempo, se emplean las cadenas de Markov en tiempo continuo.

Si en lugar de considerar una secuencia discreta $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ con i indexado en el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales, se consideran las variables aleatorias X_t con t que varía en un intervalo continuo del conjunto $\mathbb{R}$ de números reales, se tendrá una cadena en tiempo continuo. Para este tipo de cadenas en tiempo continuo, la propiedad de Markov se expresa de la siguiente manera:

$$P\big(X(t_{n+1}) = X_{n+1}\, X(t_n) = X_{n,\ldots,}\, X(t_1) = x_1\big) = P(X(t_{n+1}) = x_{n+1}\; X(t_n) = x_n)\; tal\; que\; t_{n+1} > t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1$$

Para una cadena de Markov continua con un número finito de estados puede definirse una matriz estocástica dada por:

$$P(t_{1,}t_2) = \left[p_{ij}\,(t_{1,}\,t_2)i, j = 1, \ldots, N\right], p_{ij}\,(t_{1,}\,t_2) = P[X\,(t_2) = j\; X\,(t_1) = i], 0 \geq t_{1\,<}\, t_2$$

La cadena se denomina homogénea si $P(t_{1,}t_2) = P(t_2 - t_1)$

2.7 Probabilidades de estado estable

Para cualquier estado i y j y números no negativos t y s $(0 \leq s \leq 0)$,

$$P_{ij}\,(t) = \sum_{k=1}^{M} P_{ik}\,(s) P_{kj}\,(t-s)$$

Un par de estados i y j se comunican si existen tiempos t_1 y t_2 tales que $P_{ij}\,(t_1) > 0$ y $P_{ij}\,(t_2) > 0$. Todos los estados que se comunican forman una clase. Si todos los estados forman una sola clase, es decir, si la cadena es irreducible entonces,

$P_{ij}\,(t) > 0$ para toda $t > 0$ y todos los estados i y j $\lim_{t \to \infty} P_{ij}$ (t) = πj

Siempre existe y es independiente del estado inicial de la cadena de Markov, para j=0,1,… M, estas propiedades limitantes conocidas como probabilidades de estado estable.

La siguiente ecuación es importante para obtener la probabilidad del estado estable:

$$\pi_j q_j = \sum_{i \neq j} \pi_j q_j \text{ para j = 0,1,..., M}$$

Ejemplo 10

En la recepción de una empresa se emplean dos conmutadores que funcionan continuamente, excepto cuando tienen daños. El tiempo requerido para reparar un conmutador tiene una distribución exponencial como media de medio día. Una vez se repara, el tiempo que transcurre hasta el siguiente daño tiene distribución exponencial con media de un (1) día. Estas distribuciones son independientes. Defina la variable aleatoria X(t’) como X(t’) = número de conmutadores dañados en el tiempo t’; tasa de transición total hacia afuera de cada estado.

$$q_0 = q_{01} = 2$$

$$q_1 = q_{10} + q_{12} = 3$$

$$q_2 = q_{21} = 2$$

Sustituyendo todas las tasas en las ecuaciones de estado estable dadas se obtiene:

Ecuación de balance para el estado 0: $2_{\pi 0} = 2_{\pi 1}$
Ecuación de balance para el estado 1: $3_{\pi 0} = 2_{\pi 0} + 2_{\pi 2}$
Ecuación de balance para el estado 2: $2_{\pi 2} = \pi_1$
Las probabilidades suman 1: $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

Cualquiera de las ecuaciones de balance se puede eliminar como redundante y la solución simultánea de las ecuaciones restantes da la distribución del estado estable como:

$$\pi_0, \pi_1, \pi_2 = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$$

Se concluye entonces que los dos conmutadores estarán dañados simultáneamente 20% del tiempo y estará dañado un conmutador otro 40%.

2.8 Aplicaciones

Las cadenas de Markov tienen variadas utilidades en el mercado, por esta razón es una herramienta importante para solucionar problemas en las empresas, como por ejemplo, el share de marcas, la dinámica de mantenimiento y la planeación de tareas administrativas. Pero no sólo se emplean en las áreas de la industria, también son usadas para formular modelos climatológicos, resolver problemas de estadística, termodinámica, realizar simulaciones como el modelo M/M/1, para rankear las páginas web de Google, en los juegos de azar y en diversos algoritmos de composición musical, entre otros.

Para finalizar esta unidad se desarrollará un caso en el cual se aplican todos los conceptos vistos sobre cadenas de Markov.

Ejemplo 11

A través del siguiente ejemplo se esclarecerán todos los conceptos importantes de las cadenas de Markov y se empleará este método en el proceso de una empresa dedicada a generar soluciones a la industria de la construcción con sus productos de asbesto-cemento.

En esta empresa es una prioridad el manejo del desperdicio o el desecho en el proceso productivo, debido a que su acumulación se convierte en un problema ambiental y, a su vez, en una carga en el costo final del producto.

El proceso productivo se puede describir así:

1. **Humectación:** Lugar donde se combinan las materias primas para generar la mezcla con la que se elaboraran las tejas de asbesto-cemento.

2. **Fabricación:** Lugar donde a la mezcla del proceso anterior se le da forma de teja.

3. **Desmoldeo:** Lugar donde la teja es fraguada y separada de los moldes y apilada en estibas.

4. **Almacén de producto terminado:** Lugar donde las tejas provenientes de desmoldeo terminan su ciclo de fraguado.

5. **Desperdicios:** Lugar donde se almacenan los desperdicios y los productos defectuosos generados por los procesos anteriores.

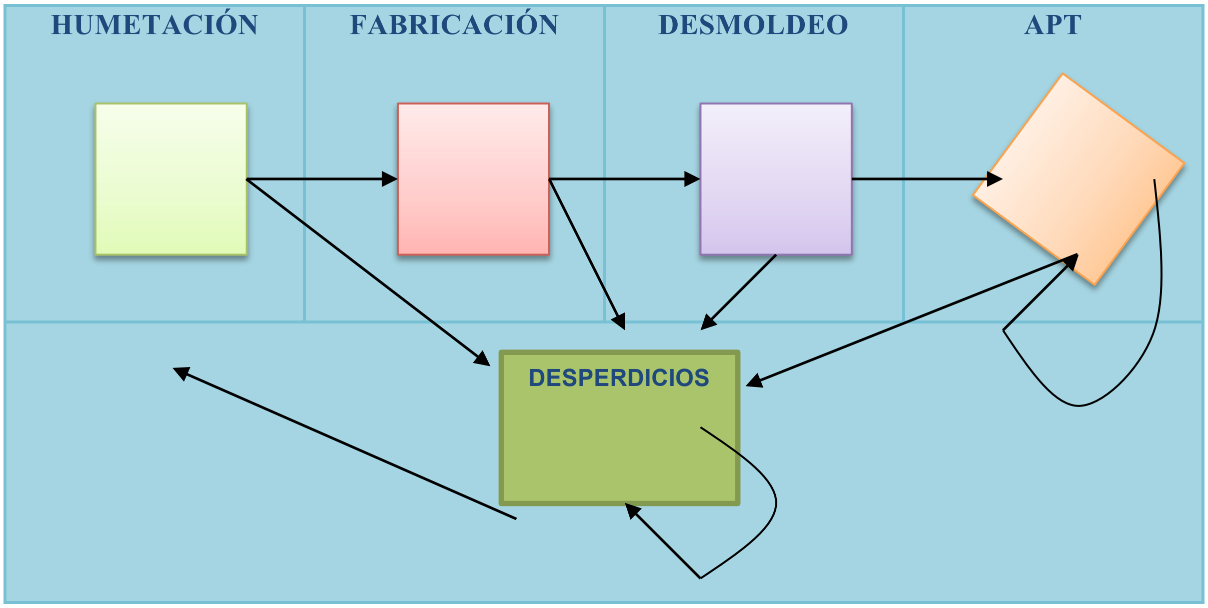

Figura 2.6. Proceso productivo

Se debe entender el proceso como una cadena de Markov, construir la matriz de transición y caracterizar la cadena.

Solución:

- Descripción de los estados:

NÚMERO DE ESTADO	ESTADO
1	HUMECTACIÓN
2	FABRICACIÓN
3	DESMOLDEO
4	APT
5	DESPERDICIOS

Tabla 2.1. Descripción de estados

El proceso se define como una cadena de Markov debido a que cumple la propiedad Markoviana de la siguiente forma:

- El sistema es un estado discreto de veladas transiciones de procesos de Markov.

- La materia prima fluye por todo el proceso productivo.

- Al pasar de un estado a otro ella se puede convertir en producto terminado o en desperdicio.

- La cantidad de materia prima que llega a un estado depende sólo de lo que sea capaz de pasar como producto bueno el estado anterior. Lo que llega a APT (Almacén de Producto Terminado) sólo depende de lo que le entregue DESMOLDEO y no depende de lo que entregue HUMECTACIÓN.

Cálculo de probabilidades

Ver la tabla 2.2 que describe la información sobre los diferentes procesos.

Proporciones		
Proporciones de Humectación		
Producción Total=	5330	
Producción Entregada=	5323.68	0.999
Producción Perdida=	6.32	0.001
Proporciones de Fabricación		
Producción Total=	5323.678548	
Producción Entregada=	5312.77	0.998
Producción Perdida=	10.90	0.002
Proporciones de Desmoldeo		
Producción Total=	5312.774	
Producción Entregada=	5241.267	0.987
Producción Perdida=	71.50624043	0.013
Proporciones de Almacén Producto Terminado		
Producción Total=	5305.159114	
Producción Entregada=	5289.79	0.997
Producción Perdida=	15.37	0.003
Proporciones de Desperdicio		
Producción Entregada=	Por norma de calidad	0.010
Producción Perdida=		0.990

Tabla 2.3 Cálculo de probabilidades.

Matriz de transición

	H	Fab	D	APT	De
H	0.000	0.999	0.000	0.000	0.001
Fab	0.000	0.000	0.980	0.000	0.020
D	0.000	0.000	0.000	0.987	0.013
APT	0.000	0.000	0.000	0.997	0.003
De	0.010	0.000	0.000	0.000	0.990

Tabla 2.4. Matriz de transición

Clasificación de los estados

J es Accesible, si $p_{ij}^{n} > 0$

Observe la matriz original:

	H	Fab	D	APT	De
H	0.000	0.999	0.000	0.000	0.001
Fab	0.000	0.000	0.980	0.000	0.020
D	0.000	0.000	0.000	0.987	0.013
APT	0.000	0.000	0.000	0.997	0.003
De	0.010	0.000	0.000	0.000	0.990

Tabla 2.5. Matriz original

Ahora se multiplica la matriz original n veces por ella misma y se mira su comportamiento para P^{3072}

$P^{3072}=$

0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235

Tabla 2.6. Cálculo matriz

Existe un n=3072 donde los valores de $p_{ij}^n > 0$. Esto indica que todos los estados j son accesibles.

Comunicación entre estados

Los estados se comunican si:

Si i es accesible desde j.
Si j es accesible desde i.

La matriz P^{3072} presenta este comportamiento pues todos los estados son accesibles de i a j o desde j a i, por lo tanto todos los estados se comunican.

Concurrencia de los estados

Sea P^T la transpuesta de la matriz original, elaborada para calcular las probabilidades de estado estable.

Se utiliza la notación R para indicar la variable π.

P^T

0.000	0.000	0.000	0.000	0.010
0.999	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.980	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.987	0.997	0.000
0.001	0.020	0.013	0.003	0.990

Tabla2. 7. Concurrencia de estado

Representación matricial de:

$\pi_j = \sum m_i = 0 \; y \; como \; \sum j = 0 \; P_{ij}^n = 1, entonces \; \sum m_j = 0 \; \pi_j = 1$ para j=0,1,....m

El sistema tiene una ecuación adicional por causa de $\sum m_j = 0 \;\; \pi_j = 1$

	R1	R2	R3	R4	R5
R1=	0.000	0.000	0.000	0.000	0.010
R2=	0.999	0.000	0.000	0.000	0.000
R3=	0.000	0.980	0.000	0.000	0.000
R4=	0.000	0.000	0.987	0.997	0.000
R5=	0.001	0.020	0.013	0.003	0.990
1=	1	1	1	1	1

Tabla 2.8. Sistema de ecuaciones

Como se tiene un sistema de 6 ecuaciones para 5 variables, se elimina una de ellas por ser redundante.

	R1	R2	R3	R4	R5
R1=	0.000	0.000	0.000	0.000	0.010
R2=	0.999	0.000	0.000	0.000	0.000
R3=	0.000	0.980	0.000	0.000	0.000
R4=	0.000	0.000	0.987	0.997	0.000
1=	1	1	1	1	1

Tabla 2.9. Desarrollo de ecuaciones

Al resolver el sistema se tienen las siguientes ecuaciones:

R1=	0.010 R5				
R2=	0.999 R1				
R3=	0.980 R2				
R4=	0.987 R3	0.997 R4			
1=	1R1	1R2	1R3	1R4	1R5

Los valores de π, en este caso R son:

R1=	0.002
R2=	0.002
R3=	0.002
R4=	0.758
R5=	0.235

Donde los valores de recurrencia (U) son $U_{jj} = 1/\pi_j$

U	Meses
U_{11}	425.1
U_{22}	425.5
U_{33}	434.2
U_{44}	1.3
U_{55}	4.3

Mostrar que los estados son aperiódicos.
Observe la matriz n-1 =3071

P^{3071}

0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235

Tabla 2.10. Matriz n-1 =3071

$P^{3072}=$

0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235

Tabla 2.11. Matriz n=3072

Para un n+1 donde n=3072 y n+1=3073 se tiene:

P^{3073}

0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235
0.002	0.002	0.002	0.758	0.235

Tabla 2.12. Matriz n = 3073

Se puede observar en las matrices que los valores de las probabilidades en todas las filas permanecen iguales entre las matrices pares e impares, además el sistema a la larga se estabilizó, lo que demuestra que la matriz es aperiódica.

Probabilidades de estado estable.

Esto indica la probabilidad de que el sistema esté a la larga en el estado j.

$\pi_1 = 0.002$

$\pi_2 = 0.002$

$\pi_3 = 0.002$

$\pi_4 = 0.758$

$\pi_5 = 0.235$

Tiempo de recurrencia y primera ocurrencia

Tiempos de recurrencia U_{ii} (es el tiempo esperado que gasta el sistema en volver a estar en i partiendo de i).

U	Meses
U_{11}	425.1
U_{22}	425.5
U_{33}	434.2
U_{44}	1.3
U_{55}	4.3

0.000	0.999	0.000	0.000	0.001
0.000	0.000	0.980	0.000	0.020
0.000	0.000	0.000	0.987	0.013
0.000	0.000	0.000	0.997	0.003
0.010	0.000	0.000	0.000	0.990

Tabla 2.13. Matriz original

U_{14}= 1 + P_{11} U_{14}+ P_{12} U_{24} + P_{13} U_{34} + P_{15} U_{54}
U_{24}= 1 + P_{21} U_{14}+ P_{22} U_{24} + P_{23} U_{34} + P_{25} U_{54}
U_{34}= 1 + P_{31} U_{14}+ P_{32} U_{24} + P_{33} U_{34} + P_{35} U_{54}
U_{54}= 1 + P_{51} U_{14}+ P_{52} U_{24} + P_{53} U_{34} + P_{55} U_{54}
U_{14}= 1+0.999 U_{24}+0.001 U_{54}
U_{24}=1+0.980 U_{34}+0.02 U_{54}
U_{34}=1+0.013 U_{54}
U_{54}=1+0.010 U_{14}+0.990 U_{54}

Tiempo de primera ocurrencia

Es el tiempo esperado que se gasta para ir del estado i al j.

U_{14}= 6.46 meses
U_{24}= 5.46 meses
U_{34}= 2.38 meses
U_{54}= 106 meses

Se puede decir que el sistema estará en el estado 4(APT) con una probabilidad de π_4 0.758. Después de n transiciones la materia prima estará en APT con una probabilidad del 75,8%. Y para la materia prima que va a desperdicios, estará en el estado 5 con una probabilidad de π_5 0.235, lo que indica que la probabilidad de que la materia prima se vuelva desperdicios es del 23.5%.

Ahora, el tiempo de recurrencia para que el sistema estando en estado 4(APT) vuelva a este estado es U_{44} = 1.3 meses. En otras palabras, el tiempo que transcurre para que vuelva a haber producto terminado es de 1.3 meses.

Resumen

Una cadena de Markov es una sucesión de ensayos similares u observaciones en la cual cada ensayo tiene el mismo número finito de resultados posibles y en donde la probabilidad de cada resultado para un ensayo dado depende sólo del resultado del ensayo inmediatamente anterior y no de cualquier resultado previo.

Existen cinco tipos de cadenas de Markov. Ellas son:

- Cadenas irreducibles.
- Cadenas positivo-recurrentes.
- Cadenas regulares.
- Cadenas absorbentes.
- Cadenas ergódicas.

Bibliografía

- Bronson, R. (1993). Investigación de operaciones, México, Editorial McGraw-Hill.
- Chediak, F. (2005). Investigación de operaciones, Colombia Ibagué, Editorial El Poira.
- Izar, J. (2012). Investigación de operaciones, México, Editorial Trillas.
- Roscoe, D.(1984). Modelos cuantitativos para administración, México, Editorial Iberoamérica.
- Lieberman,G. (2002). Investigación de operaciones. México, Editorial McGraw-Hill.
- Taha, H. (2008). Investigación de operaciones, México, Editorial Alfaomega.
- Winston, W. (2005). Investigación de operaciones, México, Editorial Thomson.
- Cibergrafía
- http://www.bioingenieria.edu.ar/academica/catedras/metestad/Cadenas%20de%20Markov-1.pdf
- http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema4pe.pdf