UNIDAD 5. ANUALIDADES CON GRADIENTES, AMORTIZACIÓN Y FONDOS DE AMORTIZACIÓN

Amortización y capitalización

Tabla de contenido

Introducción

Existen anualidades que no son uniformes sino variables y estas variaciones pueden ser en forma de una progresión aritmética o geométrica. Esta unidad ofrece la metodología para resolver problemas en los que se trabaje con este tipo de anualidades; además, trabajará lo relativo a la cantidad que de las cuotas periódicas que se pagan corresponde a la amortización al capital y cómo elaborar tablas de amortización.

Objetivos

Objetivo general

Resolver e interpretar problemas que involucran anualidades con gradiente y o amortizaciones de deudas.

Objetivos específicos

- Entender qué es una anualidad con gradiente e identificar si este es aritmético o geométrico.
- Resolver problemas de valor futuro y valor presente en anualidades con gradiente aritmético, sea este creciente o decreciente.
- Resolver problemas de valor futuro y valor presente en anualidades con gradiente geométrico, sea este creciente o decreciente.
- Comprender el concepto de amortización.
- Resolver problemas de amortización de deudas.

5.1 Serie de pagos variables

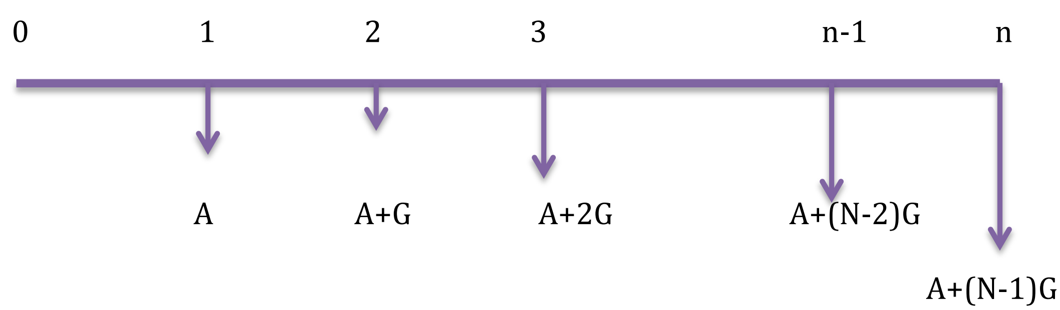
Hasta ahora se han trabajado operaciones financieras con series de pagos uniformes, sin embargo, existen pagos que de un periodo a otro varían en una cantidad constante. A esta serie de pagos se les denomina serie de pagos variables o gradientes, los cuales se pueden presentar de dos formas:

1. Como un gradiente aritmético o lineal.
2. Como un gradiente geométrico.

5.2 Gradiente aritmético o lineal

Anualidad con gradiente aritmético creciente

Si la serie de pagos periódicos vencidos A va aumentando de un periodo a otro en una cantidad fija G, a una tasa de interés i% por periodo, se dice que es un gradiente aritmético creciente. Gráficamente se representa así:



Dónde:

A= serie uniforme

G= gradiente aritmético

Cálculo del valor futuro

El valor futuro de este tipo de serie de pagos periódicos tiene dos componentes: por un lado, el valor futuro del pago que es uniforme A y, por otro, el del valor que va creciendo de un periodo a otro G, es decir:

$VF = VF_A + VF_G$, a su vez el valor futuro de A es igual a:

$$VF_A = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Y el de G:

$$VF_G = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Así, el valor futuro de una serie de pagos periódicos con gradiente aritmético creciente, se calcula de esta forma:

A tasa efectiva

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

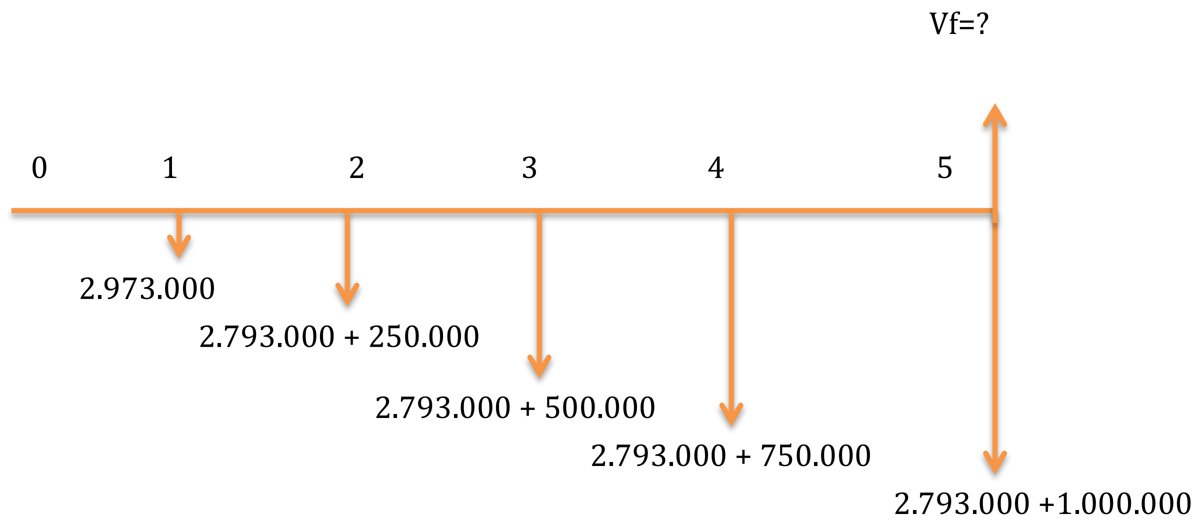
A tasa nominal

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}}\right] + \frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}} - nxm\right]$$

Ejemplo

Vanessa quiere saber qué cantidad de dinero podrá acumular en 5 años, si inicia un fondo con depósitos anuales de $2.793.000 y, a partir del segundo año, incrementa sus aportes en $250.000 anuales; la tasa de interés que le reconocen es del 5% efectiva anual.

Gráficamente el problema se ve así:



Los datos suministrados son:

A= \$2.793.000
G= \$250.000
i= 5% EA
n = 5 años

Utilizando la ecuación de tasa efectiva se tiene:

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$VF = 2.793.000\left[\frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05}\right] + \frac{250.000}{0,05}\left[\frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} - 5\right]$$

$$VF = 2.793.000 X 5.52563125 + (5.000.000 X (5.52563125 - 5))$$

$$VF = 2,793.000 X 5.52563125 + (5.000.000 X 0,52563125)$$

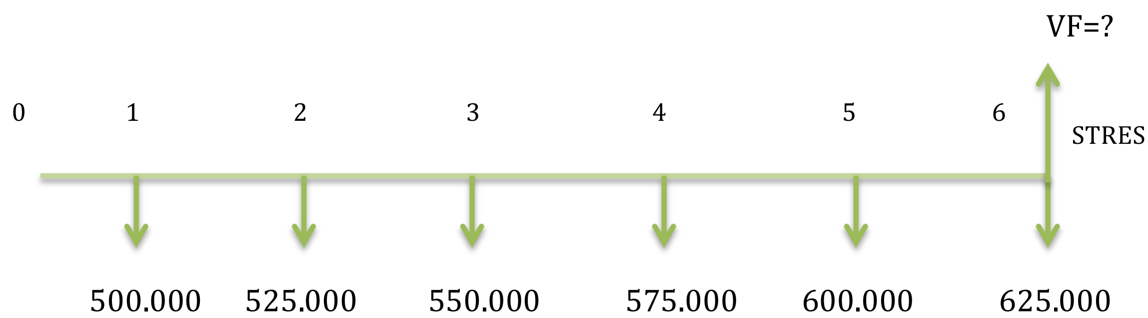
$$VF = 15.433.088.08 + 2.628.156,25$$

$$VF = 18.061.244.33$$

Si Vanessa realiza un plan de inversión iniciando con \$2.793.000 y, a partir del segundo año incrementa los depósitos anuales en \$250.000, con una tasa del 5% efectiva anual durante 5 años, podrá retirar \$18.061.244,33.

Ejemplo

A partir del siguiente gráfico encontrar el valor futuro.



La representación gráfica permite deducir que esta es una anualidad con gradiente aritmético creciente, ya que se puede extraer una anualidad uniforme de $500.000 semestral y un gradiente aritmético creciente de $25.000 semestrales. La tasa es del 3% con capitalización semestral y el tiempo 6 semestres.

A= $500.000
G= $25.000
j= 3%CCS
m= 2
nxm= 6 semestres

Como la tasa es nominal, se utiliza la fórmula correspondiente a este tipo así:

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]+\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]$$

$$VF = 500.000\left[\frac{\left(1+\frac{0,03}{2}\right)^{6}-1}{\frac{0,03}{2}}\right]+\frac{25.000}{\frac{0,03}{2}}\left[\frac{\left(1+\frac{0,03}{2}\right)^{6}-1}{\frac{0,03}{2}}-6\right]$$

$$VF = 500.000\left[\frac{(1+0,015)^{6}-1}{0,015}\right]+\frac{25.000}{0,015}\left[\frac{(1=0,015)^{6}-1}{0,015}-6\right]$$

$$VF = 500.000X6.22955093+\left(1.666.666,67X\left(6.22955093-6\right)\right)$$

$$VF = 3.114.775,47+(1.666.666,67X0,22955093)$$

$$VF = 3.114.775,47+282.584.88$$

$$VF = 3.397.360,35$$

El valor futuro solicitado a partir del gráfico es de $3.397.360,35

Cálculo de la cuota periódica uniforme (A)

Para calcular el valor de la cuota periódica uniforme, a partir del valor futuro, se utiliza una de las siguientes ecuaciones:

A tasa efectiva:

$$A = \frac{VF - \left\{ \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \right\}}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]}$$

A tasa nominal

$$A = \frac{VF - \left\{ \frac{G}{\frac{j}{m}} \left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}} - nxm \right] \right\}}{\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{i} \right]}$$

Ejemplo

Una persona desea saber con cuánto debe empezar un fondo para acumular, en 8 años, $35.000.000 a una tasa del 9% efectivo anual, y si a partir del segundo año incrementará la cuota en $80.000.

VF=$35.000.000
G=$80.000
i= 9%EA
n= 8 años

Dado que la tasa es efectiva, se reemplazan los valores en la fórmula respectiva, así:

$$A=\frac{VF-\left\{\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]\right\}}{\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]}$$

$$A=\frac{35.000.000-\left\{\frac{80.000}{0,09}\left[\frac{(1+0,09)^8-1}{0,09}-8\right]\right\}}{\left[\frac{(1+0,09)^8-1}{0,09}\right]}$$

$$A=\frac{35.000.000-\{888.888,89[11,0284738-8]\}}{11,0284738}$$

$$A=\frac{35.000.000-[888.888,89x3,0284738]}{11,0284738}$$

$$A=\frac{35.000.000-2.691.976,71}{11,0284738}$$

$$A=\frac{32.308.023,30}{11,0284738}$$

$$A=2.929.509,91.$$

La cantidad con la cual debe iniciar el fondo es de $2.929.509,91

Ejemplo:

Resolver el problema anterior con una tasa del 9% con capitalización bimestral y el gradiente bimestral de $8.000.

En este caso:

VF=$35.000.000
G= $8.000 bimestrales
j= 9% CCB
m=6
n= 8 años

$$A=\frac{VF-\left\{\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]\right\}}{\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]} \qquad A=\frac{35.000.000-\left\{\frac{8.000}{\frac{0,09}{6}}\left[\frac{\left(1+\frac{0,09}{6}\right)^{8x6}-1}{\frac{0,09}{6}}-8x6\right]\right\}}{\frac{\left(1+\frac{0,09}{6}\right)^{8x6}}{\frac{0,09}{6}}}$$

$$A=\frac{35.000.000-\left\{\frac{8.000}{0,015}\left[\frac{(1,015)^{48}-1}{0,015}-48\right]\right\}}{\frac{1,015^{48}-1}{0,015}} \qquad A=\frac{35.000.000-[533.333.33x(69,5652193-48)]}{69,5652193}$$

$$A=\frac{35.000.000-11.501.450,22}{69.5652193} \qquad A=\frac{23.498.549,78}{69.5652193}$$

$$A=337.791,64$$

Cálculo del gradiente

El cálculo del gradiente se efectúa a partir de una de estas ecuaciones:

A tasa efectiva

$$G=\frac{VF-\left\{A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]\right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-n\right]}$$

A tasa nominal

$$G=\frac{VF-\left\{A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]\right\}}{\frac{1}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]}$$

Ejemplo

Fabio inicio un fondo con una cuota mensual de $345.000 para adquirir un carro dentro de 26 meses a una tasa del 0,10% efectiva mensual. Si incrementa mensualmente sus cuotas en una cantidad de dinero, podrá acumular $15.000.000. ¿De cuánto debe ser el incremento?

Este es un problema de cálculo de gradiente a partir de valor futuro dónde:

VF=$15.000.000
A= $345.000
i= 0,10%EM
n= 26 meses

Luego:

$$G=\frac{VF-\left\{A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]\right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-n\right]}\quad G=\frac{15.000.000-\left\{345.000\left[\frac{(1+0{,}001)^{26}-1}{0{,}001}\right]\right\}}{\frac{1}{0{,}001}\left[\frac{(1+0{,}001)^{26}-1}{0{,}001}-26\right]}$$

$$G=\frac{15.000.000-\{345.000X26.32761502\}}{\frac{1}{0{,}001}[26.32761502-26]}\quad G=\frac{15.000.000-9.083.027{,}18}{\frac{0{,}327615016}{0{,}001}}$$

$$G=\frac{5.916.972{,}82}{327.615016}\backslash$$

$$G=18.060{,}75$$

La cantidad en que Fabio debe incrementar mensualmente su cuota de $345.000 para conseguir $15.000.000 en 26 meses, a una tasa del 0,10% efectiva mensual, es de $18.060,75.

Ejemplo

Calcular el gradiente aritmético creciente que permitirá ahorrar, en 32 trimestres, $28.0000.000 a una tasa del 5,6% con capitalización trimestral. La cuota con la cual se inicia el fondo es de $725.000 trimestrales vencidos.

Este ejercicio implica hallar el valor de G con tasa nominal, dónde:

VF=$28.000.000
A= $275.000
j= 5,6%CCT
m=4
nxm= 32 trimestres.

Utilizando la ecuación de cálculo de gradiente con tasa nominal, se tiene:

$$G=\frac{VF-\left\{A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]\right\}}{\frac{1}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]}\quad G=\frac{28.000.000-\left\{275.000\left[\frac{\left(1+\frac{0,056}{4}\right)^{32}-1}{\frac{0,056}{4}}\right]\right\}}{\frac{1}{\frac{0,056}{4}}\left[\frac{\left(1+\frac{0,056}{4}\right)^{32}-1}{\frac{0,056}{4}}-32\right]}$$

$$G=\frac{28,000.000-\left\{275.000\left[\frac{1,014^{32}-1}{0,014}\right]\right\}}{\frac{1}{0,014}\left[\frac{1,014^{32}-1}{0,014}-32\right]}\quad G=\frac{28.000.000-\left[275.000X40.02308417\right]}{\frac{1}{0,014}\left[40.02308417-32\right]}$$

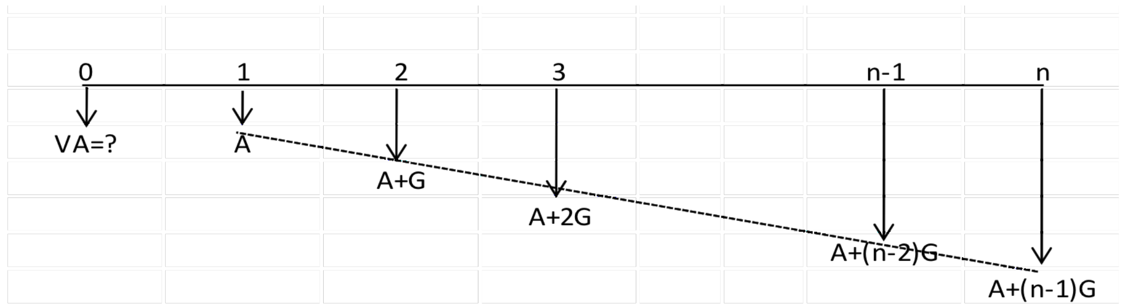
$$G=\frac{28.000.000-11.006.348,15}{573.0774405}\quad G=\frac{16.993.651,85}{573.0774405}$$

$$G=29.653,33$$

El valor del gradiente aritmético que permite que en 32 trimestres se ahorren $28.000.000 a una tasa del 5,6% con capitalización trimestral, iniciando con una cuota de $275.000, es de $29.653,33.

Cálculo del valor presente

Partiendo del gráfico representativo del cálculo del valor presente de una anualidad con gradiente aritmético creciente, se deducirán las fórmulas a utilizar en este tipo de situaciones.



A tasa efectiva:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

A tasa nominal:

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right] + \frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}} - \frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]$$

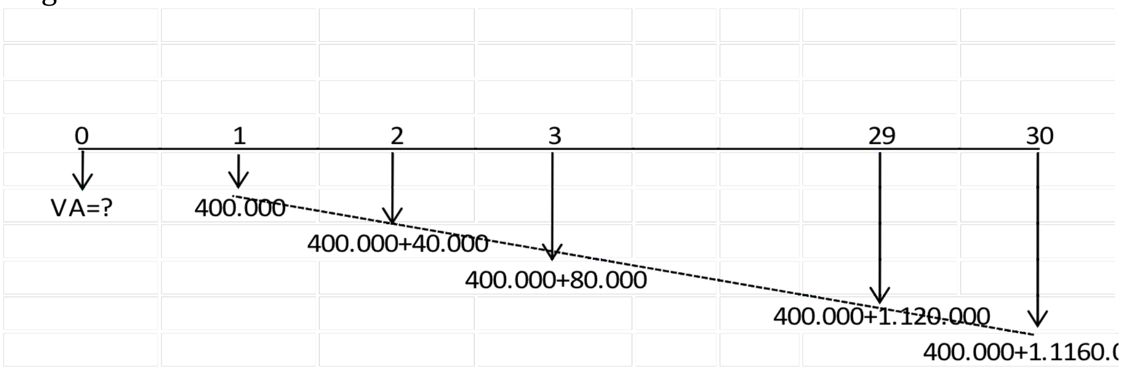
Dónde:

VA = valor presente
A= Cuota periódica uniforme
G= gradiente aritmético
i= tasa efectiva
j= tasa nominal
n= tiempo
m= periodos de capitalización en un año
nxm = periodos de pago total

Ejemplo

Hallar el valor presente de una serie de pagos que se inician con $400.000 bimestrales y, a partir del segundo bimestre, crecen en $40.000 bimestrales. El tiempo de pago son 5 años y la tasa del 0,9% efectiva bimestral.

La gráfica de este caso es:



El caso reporta los siguientes datos:

A= $400.000 bimestrales
G=$40.000 bimestrales
i= 0,9% EB
n= 5 años X 6 = 30 bimestres

Como la tasa es efectiva, al utilizar la fórmula correspondiente se obtiene:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

$$VA = 400.000\left[\frac{1-(1+0{,}009)^{-5x6}}{0{,}009}\right] + \frac{40.000}{0{,}009}\left[\frac{1-(1+0{,}009)^{-5x6}}{0{,}009} - \frac{5x6}{(1+0{,}009)^{5x6}}\right]$$

$$VA = 400.000\left[\frac{1-1{,}009^{-30}}{0{,}009}\right] + 4.444.444{,}44\left[\frac{1-1{,}009^{-30}}{0{,}009} - \frac{30}{1{,}009^{30}}\right]$$

$$VA = 400.000x26{,}18866337 + 4.444.444{,}44x[26.18866337 - 22.92906089]$$

$$VA = 10.475.465{,}35 + 14.487.122{,}12$$

$$VA = 24.962.587{,}47$$

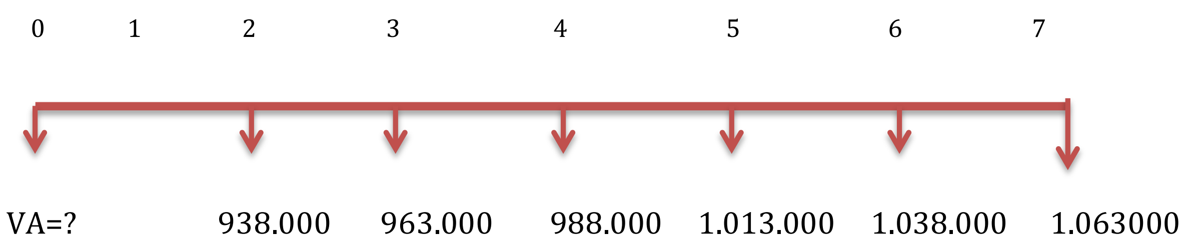
El valor presente de pagos que se inician con $400.000 bimestrales y, a partir del segundo bimestre crecen en $40.000 bimestrales a una tasa del 0,9% efectiva bimestral, durante 5 años, es de $24.962.587,47.

Ejemplo

¿A cuánto equivalen hoy una serie de pagos que se inician en el segundo cuatrimestre con $938.000 cuatrimestrales y, a partir del 3 cuatrimestre, se incrementan en $25.000 cuatrimestralmente? El tiempo son 2 años y 4 meses, y la tasa de interés del 3,6% con capitalización cuatrimestral.

Este problema contiene un gradiente aritmético creciente con tasa nominal, el cual comienza en el periodo dos. Como debe hallarse el valor presente en el momento cero, es necesario:

1. Calcular el valor presente de la anualidad utilizando la ecuación respectiva, el cual queda en el periodo 1.
2. El VA encontrado debe llevarse al momento cero (0), a través del valor presente de un pago único.



j= 3,6%

A=$398.000
G=$25.000
J=3,6%CCC
M=3
Nxm= 7 cuatrimestres 2x3=6 + (4/4=1)=7

1. $$VA_1 = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]+\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}-\frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]$$

$$VA_1 = 938.000\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.036}{3}\right)^{-7}}{\frac{0,036}{3}}\right]+\frac{25.000}{\frac{0,036}{3}}\left[\frac{1+\left(\frac{0,036}{3}\right)^{-7}}{\frac{0,036}{3}}-\frac{7}{\left(1+\frac{0,036}{3}\right)^{7}}\right]$$

$$VA_1 = 938.000\left[\frac{1-1{,}012^{-7}}{0{,}012}\right] + \frac{25.000}{0{,}012}\left[\frac{1-1{,}012^{-7}}{0{,}012} - \frac{7}{1{,}012^{7}}\right]$$
$$VA_1 = (938.000X6{,}675742474) + (2.083.333{,}33)[6.675742474 - 6{,}09392125]$$
$$VA_1 = 6.261.846{,}44 + 1.212.127{,}55$$
$$VA_1 = 7.473.973.99$$

2.

$$VA = VA_1\left(1{,}012^{-1}\right)$$
$$VA = 7.473.973.99X0{,}9881422925$$
$$VA = 7.385.349{,}79$$

Los $938.000 que se incrementan en $25.000 cuatrimestralmente, durante 7 cuatrimestres a una tasa del 3,6% con capitalización cuatrimestral, equivalen hoy a $7.385.349,79.

Cálculo de la cuota periódica

Cuando lo que se quiere hallar es la cuota periódica a partir del valor presente de una anualidad con gradiente aritmético creciente, se utiliza una de estas ecuaciones:

A tasa efectiva

$$A = \left[\frac{VA - \left\{\frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{=n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}\right]$$

A tasa nominal

$$A = \left[\frac{VA - \left\{\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{=nxm}}{\frac{j}{m}} - \frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]}\right]$$

Dónde:

VA= Valor presente
A= anualidad uniforme
G gradiente aritmético creciente
i= tasa efectiva
n= tiempo
j= tasa nominal
m= periodos de capitalización en un año
nxm= periodos totales de pago

Ejemplo

Jaime requiere un préstamo de $40.000.000 a 5 años de plazo. El banco le ofrece:

1. Cuotas anuales que comenzará a pagar a partir del primer año, las cuales debe incrementar a partir del segundo año en $225.000 anuales y una tasa de interés del 7,3% efectiva anual.
2. Cuotas semestrales que comenzará a pagar a partir del primer semestre, las cuales debe incrementar a partir del segundo semestre en $175.000 semestrales y una tasa de interés del 7,3% con capitalización semestral. ¿Qué alternativa le resulta más adecuada?

Aquí se requiere encontrar el valor de las cuotas periódicas uniformes y ver cuál es la más baja. El punto 1 es con tasa efectiva y el 2 con tasa nominal. Procediendo a aplicar la ecuación propia de cada caso se tiene:

1.

$$A = \left[\frac{VA - \left\{ \frac{G}{i} \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}} \right] \right\}}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]} \right]$$

$$A = \left[\frac{40.000.000 - \left\{ \frac{225.000}{0,073} \left[\frac{1-1,073^{-5}}{0,073} - \frac{5}{1,073^{5}} \right] \right\}}{\left[\frac{1-1,073^{-5}}{0,073} \right]} \right]$$

$$A = \left[\frac{40.000.000 - \{3.083.191,78x(4.067471638 - 1.422324234)\}}{4.067471639}\right]$$

$$A = \frac{40.000.000 - (3.083.191,78x2.645147404)}{4.067471639}$$

$$A = \frac{40.000.000 - 8.155.496,73}{4.067471639} \quad A = \frac{31.844.503.27}{4.067471639}$$

$$A = 7.829.065.84$$

2.

$$A = \left[\frac{VA - \left\{\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{= nxm}}{\frac{j}{m}} - \frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]}\right] A = \left[\frac{40.000.000 - \left\{\frac{175.000}{0,073/2}\left[\frac{1-\left(1+0,073/2\right)^{-5x2}}{0,073/2} - \frac{5x2}{\left(1+\frac{0,073}{2}\right)^{5x2}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-\left(1+0,073/2\right)^{-5x2}}{0,073/2}\right]}\right]$$

$$A = \left[\frac{40.000.000 - \left\{\frac{175.000}{0,0365}\left[\frac{1-1,0365^{-10}}{0,0365} - \frac{10}{1,0365^{10}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-1,0365^{-10}}{0,0365}\right]}\right] A = \frac{40.000.000 - [4.794.520,55x(8.25408079 - 6.987260512)]}{8.25408097}$$

$$A = \frac{40.000.000 - 6.078.864.}{8.25408097} \quad A = \frac{33.921.136}{8.25408097}$$

$$A = 4.109.619,97$$

Con la opción 1 la cuota periódica es de $7.829.065,84, mientras que con la opción 2 la cuota queda en $4.109.619,97, lo cual indica que la mejor opción es la 2.

Cálculo del gradiente

Cuando el requerimiento es hallar el valor del gradiente aritmético creciente a partir de valor presente, se debe:

A tasa efectiva

$$G = \left[\frac{VA - \left\{ A \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}} \right]} \right]$$

A tasa nominal

$$G = \left[\frac{VA - \left\{ A \left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{j/m} \right] \right\}}{\frac{1}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+j/m\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}} - \frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}} \right]} \right]$$

Dónde:

VA= Valor presente
A= anualidad uniforme
G gradiente aritmético creciente
i= tasa efectiva
n= tiempo
j= tasa nominal
m= periodos de capitalización en un año
nxm= periodos totales de pago

Ejemplo:

Santiago invierte hoy $50.000.000 con la esperanza de que le entreguen, a partir del primer periodo, una suma que inicie con $3.000.000 y, a partir del segundo año, se incremente en una cierta suma anual que le sea atractiva. Si el tiempo es de 3 años y la tasa del 10% efectivo anual, ¿de cuánto debe ser ese gradiente?

El problema entrega:

VA=$50.000.000
A= $3.000.000
i= 10%EA
n= 3 años

Como la tasa es efectiva, reemplazando los valores respectivos se tiene:

$$G = \left[\frac{VA - \left\{ A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}} \right]} \right]$$

$$G = \left[\frac{50.000.000 - \left\{ 3.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-3}}{0{,}10} \right] \right\}}{\frac{1}{0{,}10}\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-3}}{0{,}10} - \frac{3}{(1+0{,}10)^{3}} \right]} \right]$$

$$G = \left[\frac{50.000.000 - [3.000.000 X 2.486851991]}{\frac{1}{0{,}10}[2.486851991 - 2{,}253944403]} \right]$$

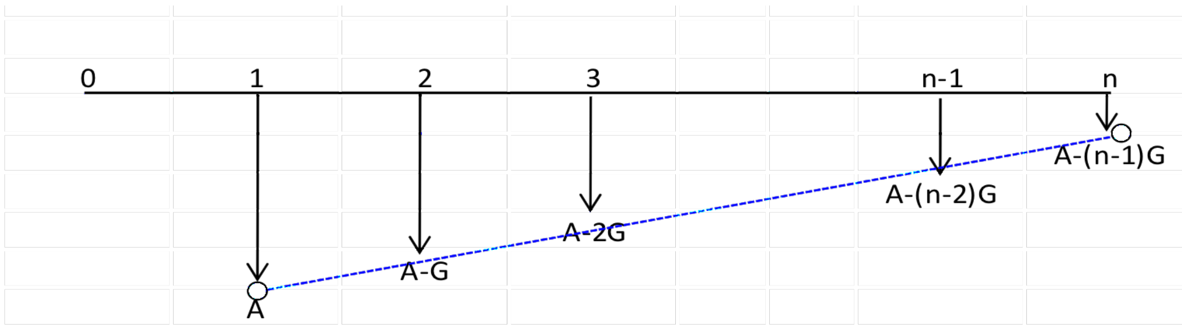
$$G = \frac{50.000.000 - 7.460.555{,}97}{2.32907588}$$

$$G = 18.264.516{,}15$$

La cantidad en que se debe incrementar la cuota anual para cumplir las expectativas de Santiago es de $18.264.516,15.

Anualidad con gradiente aritmético decreciente

Si la serie de pagos periódicos vencidos A va disminuyendo de un periodo a otro en una cantidad fija G, a una tasa de interés i% por periodo, se dice que es un gradiente aritmético decreciente. Gráficamente se representa así:



Dónde:

A= serie uniforme
G= gradiente aritmético

Cálculo del valor futuro

El valor futuro de este tipo de serie de pagos periódicos tiene dos componentes: por un lado, el valor futuro del pago que es uniforme A y, por otro, el del valor que va decreciendo de un periodo a otro G, es decir:

$VF=VF_A-VF_G$, a su vez el valor futuro de A es igual a:

$$VF_A = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Y el de G:

$$VF_G = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Así, el valor futuro de una serie de pagos periódicos con gradiente aritmético decreciente, se calcula de esta forma:

A tasa efectiva

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

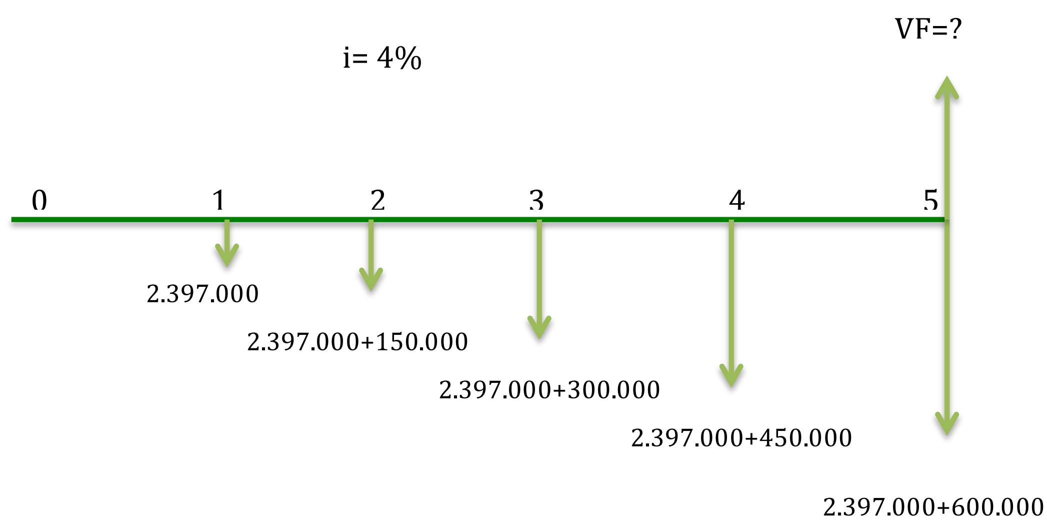
A tasa nominal

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]-\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]$$

Ejemplo

Taliana quiere saber qué cantidad podrá acumular en 5 años, si inicia un fondo con depósitos anuales de $2.397.000 y, a partir del segundo año, disminuye sus aportes en $150.000 anuales. La tasa de interés que le reconocen es del 4% efectiva anual.

Gráficamente el problema se ve así:



Los datos suministrados son:

A= $2.397.000
G= $150.000
i= 4% EA
n = 5 años

Utilizando la ecuación de tasa efectiva se tiene:

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$VF = 2.397.000\left[\frac{(1+0{,}04)^5 - 1}{0{,}04}\right] - \frac{150.000}{0{,}04}\left[\frac{(1+0{,}04)^5 - 1}{0{,}04} - 5\right]$$

$$VF = 2.397.000X5.41632256 - (3.750.000X(5.41632256 - 5))$$

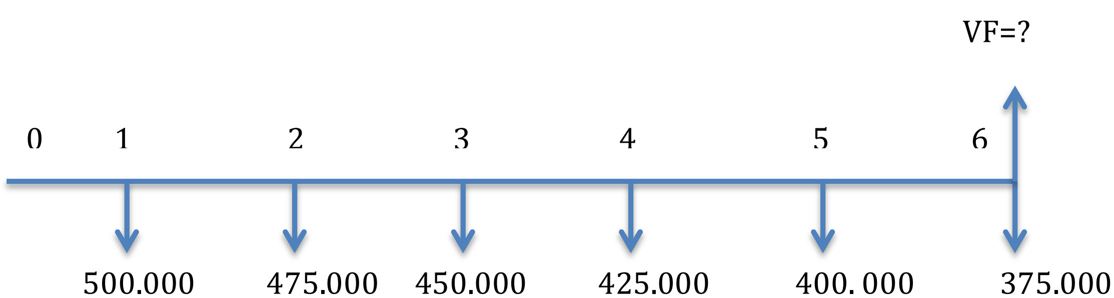
$$VF = 2.397.000X5.41632256 - (3.750.000X0{,}41632256)$$

$$VF = 14.544.134{,}78$$

Si Taliana realiza un plan de inversión iniciando con $2.397.000 y, a partir del segundo año disminuye los depósitos anuales en $150.000, con una tasa del 4% efectiva anual durante 5 años, podrá retirar $14.544.134,78.

Ejemplo

A partir del siguiente gráfico encuentre el valor futuro.



La representación gráfica permite deducir que esta es una anualidad con gradiente aritmético decreciente, ya que se puede extraer una anualidad uniforme de $500.000 semestrales y un gradiente aritmético decreciente de $25.000 semestrales. La tasa es del 3% con capitalización semestral y el tiempo 6 semestres.

A= $500.000
G= $25.000
j= 3%CCS
m= 2
nxm= 6 semestres

Como la tasa es nominal se utiliza la fórmula correspondiente a este tipo, así:

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]-\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]$$

$$VF = 500.000\left[\frac{\left(1+\frac{0{,}03}{2}\right)^{6}-1}{\frac{0{,}03}{2}}\right]-\frac{25.000}{\frac{0{,}03}{2}}\left[\frac{\left(1+\frac{0{,}03}{2}\right)^{6}-1}{\frac{0{,}03}{2}}-6\right]$$

$$VF = 500.000\left[\frac{(1+0{,}015)^{6}-1}{0{,}015}\right]-\frac{25.000}{0{,}015}\left[\frac{(1+0{,}015)^{6}-1}{0{,}015}-6\right]$$

$$VF = 500.000X6.22955093-(1.666.666{,}67X(6.22955093-6))$$

$$VF = 3.114.775{,}47-(1.666.666{,}67X0{,}22955093)$$

$$VF = 3.114.775{,}47-282.584.88$$

$$VF = 2.832.190{,}59$$

El valor futuro solicitado a partir del gráfico es de $2.832.190,59

Cálculo de la cuota periódica uniforme (A)

Para calcular el valor de la cuota periódica uniforme a partir del valor futuro, se utiliza una de las siguientes ecuaciones:

A tasa efectiva:

$$A = \frac{VF+\left\{\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-n\right]\right\}}{\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]}$$

A tasa nominal:

$$A=\frac{VF+\left\{\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]\right\}}{\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{i}\right]}$$

Ejemplo:

Una persona desea saber con cuánto debe empezar un fondo para acumular, en 8 años, $35.000.000 a una tasa del 9% efectivo anual, si a partir del segundo año disminuye la cuota en $80.000.

VF=$35.000.000
G=$80.000
i= 9%EA
n=8 años

Dado que la tasa es efectiva, se reemplazan los valores en la fórmula respectiva, así:

$$A=\frac{VF+\left\{\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-n\right]\right\}}{\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]}$$

$$A=\frac{35.000.000+\left\{\frac{80.000}{0{,}09}\left[\frac{(1+0{,}09)^{8}-1}{0{,}09}-8\right]\right\}}{\left[\frac{(1+0{,}09)^{8}-1}{0{,}09}\right]}$$

$$A=\frac{35.000.000+\{888.888,89[11,0284738-8]\}}{11,0284738}$$

$$A=\frac{35.000.000+[888.888,89x3,0284738]}{11,0284738}$$

$$A=\frac{35.000.000+2.691.976,71}{11,0284738}$$

$$A=\frac{37.691.976.71}{11,0284738}$$

$$A=3.417.696,54$$

La cantidad con la cual debe iniciar el fondo es de $3.417.696.54

Ejemplo

Resolver el problema anterior, con una tasa del 9% con capitalización bimestral y el gradiente bimestral de $8.000.

En este caso:

VF=$35.000.000
G= $8.000 bimestrales
j= 9% CCB
m=6
n= 8 años

$$A=\frac{VF+\left\{\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]\right\}}{\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]}\quad A=\frac{35.000.000+\left\{\frac{8.000}{\frac{0,09}{6}}\left[\frac{\left(1+\frac{0,09}{6}\right)^{8x6}-1}{\frac{0,09}{6}}-8x6\right]\right\}}{\frac{\left(1+\frac{0,09}{6}\right)^{8x6}}{\frac{0,09}{6}}}$$

$$A=\frac{35.000.000+\left\{\frac{8.000}{0,015}\left[\frac{(1,015)^{48}-1}{0,015}-48\right]\right\}}{\frac{1,015^{48}-1}{0,015}}\quad A=\frac{35.000.000+[533.333.33x(69,5652193-48)]}{69,5652193}$$

$$A=\frac{35.000.000+11.501.450,22}{69.5652193}\quad A=\frac{46.501.450,22}{69.5652193}$$

$$A=668.458,33$$

Cálculo del gradiente

El cálculo del gradiente se efectúa a partir de una de estas ecuaciones:

A tasa efectiva

$$G = \frac{VF + \left\{ A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]}$$

A tasa nominal

$$G = \frac{VF + \left\{ A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}} \right] \right\}}{\frac{1}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}} - nxm \right]}$$

Ejemplo

Fabio inicio un fondo con una cuota mensual de \$345.000 para adquirir un carro dentro de 26 meses a una tasa del 0,10% efectiva mensual, Si incrementa mensualmente sus cuotas en una cantidad de dinero, podrá acumular \$15.000.000, ¿De cuánto debe ser el incremento?

Este es un problema de cálculo de gradiente a partir de valor futuro donde:

VF=\$15.000.000
A= \$345.000
i=0,10%EM
n=26 meses

Luego:

$$G=\frac{VF+\left\{A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]\right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-n\right]}\quad G=\frac{15.000.000+\left\{345.000\left[\frac{(1+0{,}001)^{26}-1}{0{,}001}\right]\right\}}{\frac{1}{0{,}001}\left[\frac{(1+0{,}001)^{26}-1}{0{,}001}-26\right]}$$

$$G=\frac{15.000.000+\{345.000X26.32761502\}}{\frac{1}{0{,}001}[26.32761502-26]}\quad G=\frac{15.000.000+9.083.027{,}18}{\frac{0{,}327615016}{0{,}001}}$$

$$G=\frac{24.083.027{,}18}{327.615016}\backslash$$

$$G=101.353.14$$

La cantidad en que Fabio debe disminuir mensualmente su cuota de \$345.000 para conseguir \$15.000.000 en 26 meses a una tasa del 0,10% efectiva mensual, es de \$101.353,14.

Ejemplo

Calcule el gradiente aritmético decreciente que permitirá ahorrar en 32 trimestres \$28.0000.000 a una tasa del 5,6% con capitalización trimestral. La cuota con la cual se inicia el fondo es de \$725.000 trimestrales vencidos.

Este ejercicio implica hallar el valor de G con tasa nominal, dónde:

VF=\$28.000.000
A= \$275.000
j= 5,6% CCT
m=4
nxm= 32 trimestres

Utilizando la ecuación de cálculo de gradiente con tasa nominal se tiene:

$$G=\frac{VF+\left\{A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]\right\}}{\frac{1}{\frac{j}{m}}\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}-nxm\right]}\qquad G=\frac{28.000.000+\left\{275.000\left[\frac{\left(1+\frac{0,056}{4}\right)^{32}-1}{\frac{0,056}{4}}\right]\right\}}{\frac{1}{\frac{0,056}{4}}\left[\frac{\left(1+\frac{0,056}{4}\right)^{32}-1}{\frac{0,056}{4}}-32\right]}$$

$$G=\frac{28,000.000+\left\{275.000\left[\frac{1,014^{32}-1}{0,014}\right]\right\}}{\frac{1}{0,014}\left[\frac{1,014^{32}-1}{0,014}-32\right]}\qquad G=\frac{28.000.000+\left[275.000X\,40.02308417\right]}{\frac{1}{0,014}\left[40.02308417-32\right]}$$

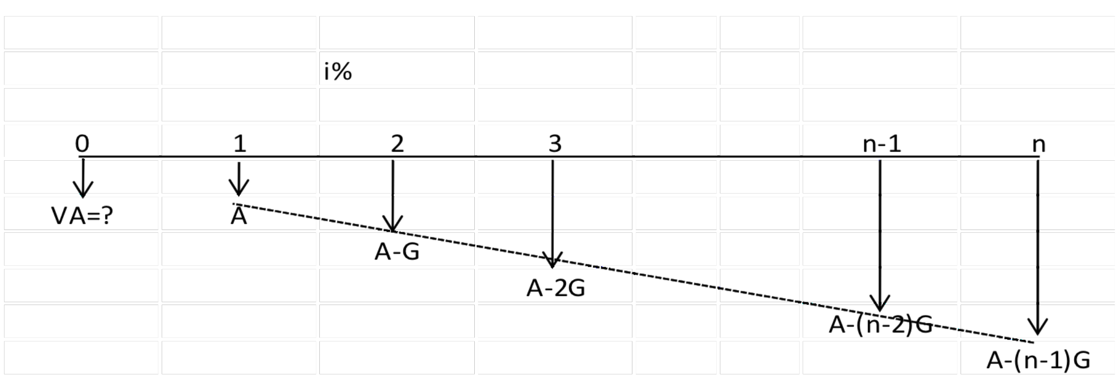
$$G=\frac{28.000.000+11.006348,15}{573.0774405}\qquad G=\frac{39.006.348,15}{573.0774405}$$

$$G=\$68.064,71$$

El valor del gradiente aritmético que permite que en 32 trimestres se ahorren \$28.000.000 a una tasa del 5,6% con capitalización trimestral, iniciando con una cuota de \$275.000, es de \$68.064.71.

Cálculo del valor presente

Partiendo del gráfico representativo del cálculo del valor presente de una anualidad con gradiente aritmético creciente, se deducirán las fórmulas a utilizar en este tipo de situaciones.



A tasa efectiva:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

A tasa nominal:

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right] - \frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}} - \frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]$$

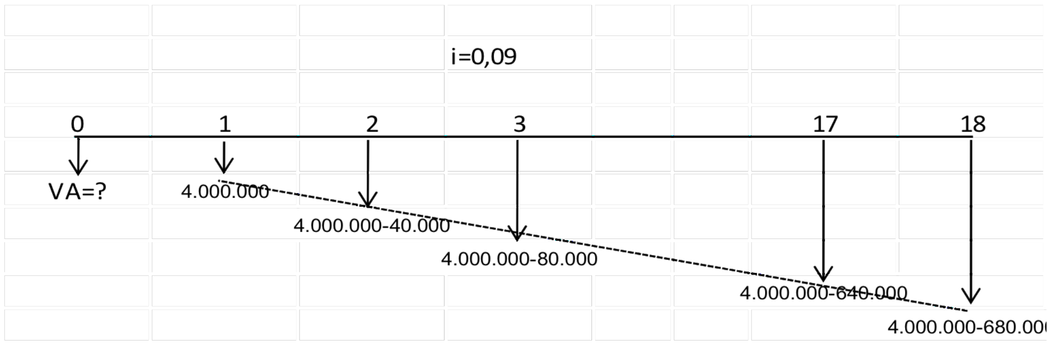
Dónde:

VA = valor presente
A= cuota periódica uniforme
G= gradiente aritmético
i= tasa efectiva
j= tasa nominal
n= tiempo
m= periodos de capitalización en un año
nxm = periodos de pago total

Ejemplo

Hallar el valor presente de una serie de pagos que se inician con $4.000.000, bimestrales, y a partir del segundo bimestre decrecen en $40.000 bimestrales, el tiempo de pago son 3 años y la tasa del 0,9% efectiva bimestral.

La gráfica de este caso es:



El caso reporta los siguientes datos:

A= $400.000 bimestrales
G=$40.000 bimestrales
i= 0,9% EB
n= 5 años X 6 = 30 bimestres

Como la tasa es efectiva, al utilizar la fórmula correspondiente se obtiene:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

$$VA = 4.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}009)^{-3x6}}{0{,}009}\right] - \frac{40.000}{0{,}009}\left[\frac{1-(1+0{,}009)^{-3x6}}{0{,}009} - \frac{3x6}{(1+0{,}009)^{3x6}}\right]$$

$$VA = 4.000.000\left[\frac{1-1{,}009^{-18}}{0{,}009}\right] - 4.444.444{,}44\left[\frac{1-1{,}009^{-18}}{0{,}009} - \frac{18}{1{,}009^{18}}\right]$$

$$VA = 4.000.000x16.54914393 - 4.444.444{,}44x[16.54914393 - 15.31903868]$$

$$VA = 66.196.575{,}72 - 5.467.134{,}44$$

$$VA = 60.729.441{,}28$$

El valor presente de pagos que se inician con $4.000.000 bimestrales y a partir del segundo bimestre decrecen en $40.000 bimestrales a una tasa del 0,9% efectiva bimestral, durante3 años, es de $60.729.441,28

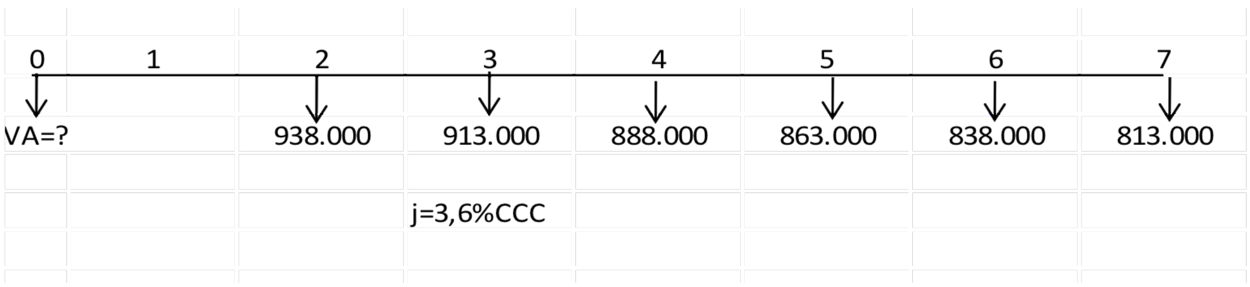
Ejemplo

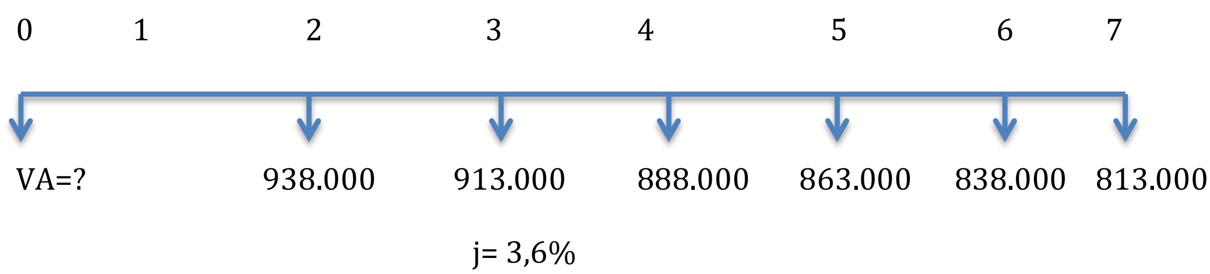
¿A cuánto equivalen hoy una serie de pagos que se inician en el segundo cuatrimestre con $938.000 cuatrimestrales y a partir del 3 cuatrimestre disminuyen en $25.000

cuatrimestralmente? El tiempo son 2 años 4 meses y la tasa del 3,6% con capitalización cuatrimestral.

Este problema contiene un gradiente aritmético decreciente con tasa nominal el cual comienza en el periodo dos, pero como debe hallarse el valor presente en el momento cero es necesario:

1. Calcular el valor presente de la anualidad utilizando la ecuación respectiva, el cual queda en el periodo 1.
2. El VA encontrado debe llevarse al momento cero (0), a través del valor presente de un pago único.





A=$398.000
G=$25.000
J=3,6%CCC
M=3
Nxm= 7 cuatrimestres 2x3=6 + (4/4=1)=7

1.

$$VA_1 = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right] - \frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}} - \frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]$$

$$VA_1 = 938.000\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.036}{3}\right)^{-7}}{\frac{0,036}{3}}\right] - \frac{25.000}{\frac{0,036}{3}}\left[\frac{1+\left(\frac{0,036}{3}\right)^{-7}}{\frac{0,036}{3}} - \frac{7}{\left(1+\frac{0,036}{3}\right)^{7}}\right]$$

$$VA_1 = 938.000\left[\frac{1-1{,}012^{-7}}{0{,}012}\right] - \frac{25.000}{0{,}012}\left[\frac{1-1{,}012^{-7}}{0{,}012} - \frac{7}{1{,}012^{7}}\right]$$

$$VA_1 = (938.000X6{,}675742474) - (2.083.333{,}33)[6.675742474 - 6{,}09392125]$$

$$VA_1 = 6.261.846{,}44 - 1.212.127{,}55$$

$$VA_1 = 5.049.718{,}89$$

2.

$$VA = VA_1\left(1{,}012^{-1}\right)$$

$$VA = 5.049.718{,}89X0{,}9881422925$$

$$VA = 4.989.840{,}8$$

Los $938.000 que decrecen en $25.000 cuatrimestralmente, durante 7 cuatrimestres a una tasa del 3,6% con capitalización cuatrimestral equivalen hoy a $4.989.840,80

Cálculo de la Cuota periódica

Cuando lo que se quiere hallar es la cuota periódica a partir del valor presente de una anualidad con gradiente aritmético creciente, se utiliza una de estas ecuaciones:

A tasa efectiva:

$$A = \left[\frac{VA + \left\{\frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}\right]$$

A tasa nominal:

$$A=\left[\frac{VA+\left\{\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{=nxm}}{\frac{j}{m}}-\frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]}\right]$$

Dónde:

VA= valor presente
A= anualidad uniforme
G gradiente aritmético creciente
i= tasa efectiva
n= tiempo
j= tasa nominal
m= periodos de capitalización en un año
nxm= periodos totales de pago

Ejemplo

Jaime requiere un préstamo de $40.000.000 a 5 años de plazo. El banco le ofrece:

a. Cuotas anuales que comenzará a pagar a partir del primer año, las cuales deben disminuir a partir del segundo año en $225.000 anuales y una tasa de interés del 7,3% efectiva anual.

b. Cuotas semestrales que comenzará a pagar a partir del primer semestre, las cuales deben disminuir a partir del segundo semestre en $175.000 semestrales y una tasa de interés del 7,3% con capitalización semestral.

¿Qué alternativa le resulta más adecuada?

Aquí se requiere encontrar el valor de las cuotas periódicas uniformes y ver cuál es la más baja. El punto a. es con tasa efectiva y el b. con tasa nominal. Procediendo a aplicar la ecuación propia de cada caso se tiene:

1.

$$A=\left[\frac{VA+\left\{\frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-\frac{n}{(1+i)^{n}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}\right]$$

$$A=\left[\frac{40.000.000+\left\{\frac{225.000}{0{,}073}\left[\frac{1-1{,}073^{-5}}{0{,}073}-\frac{5}{1{,}073^{5}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-1{,}073^{-5}}{0{,}073}\right]}\right]$$

$$A=\left[\frac{40.000.000+\{3.083.191{,}78x(4.067471638-1.422324234)\}}{4.067471639}\right]$$

$$A=\frac{40.000.000+(3.083.191{,}78x2.645147404)}{4.067471639}$$

$$A=\frac{40.000.000+8.155.496{,}73}{4.067471639}\quad A=\frac{48.155.496.73}{4.067471639}$$

$$A=11.839.172{,}10$$

2.

$$A=\left[\frac{VA+\left\{\frac{G}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}-\frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]}\right]\quad A=\left[\frac{40.000.000+\left\{\frac{175.000}{0{,}073/2}\left[\frac{1-\left(1+0{,}073/2\right)^{-5x2}}{0{,}073/2}-\frac{5x2}{\left(1+\frac{0{,}073}{2}\right)^{5x2}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-\left(1+0{,}073/2\right)^{-5x2}}{0{,}073/2}\right]}\right]$$

$$A=\left[\frac{40.000.000+\left\{\frac{175.000}{0{,}0365}\left[\frac{1-1{,}0365^{-10}}{0{,}0365}-\frac{10}{1{,}0365^{10}}\right]\right\}}{\left[\frac{1-1{,}0365^{-10}}{0{,}0365}\right]}\right]\quad A=\frac{40.000.000+[4.794.520{,}55x(8.25408079-6.987260512)]}{8.25408097}$$

$$A=\frac{40.000.000+6.078.864.}{8.25408097}\quad A=\frac{46.078.864}{8.25408097}$$

$$A=5.582.555.37$$

Con la opción a. la cuota periódica es de $11.839.172,10, mientras que con la opción b. la cuota queda en $5.582.555,37, lo cual indica que la mejor opción es la b.

Cálculo del gradiente

Cuando el requerimiento es hallar el valor del gradiente aritmético creciente a partir de valor presente se debe:

A tasa efectiva

$$G = \left[\frac{VA + \left\{ A \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}} \right]} \right]$$

A tasa nominal

$$G = \left[\frac{VA + \left\{ A \left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{j/m} \right] \right\}}{\frac{1}{\frac{j}{m}}\left[\frac{1-\left(1+j/m\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}} - \frac{nxm}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}} \right]} \right]$$

Dónde:

VA= valor presente
A= anualidad uniforme
G gradiente aritmético creciente
i= tasa efectiva
n= tiempo
j= tasa nominal
m= periodos de capitalización en un año
nxm= periodos totales de pago

Ejemplo

Santiago invierte hoy $50.000.000 con la esperanza de que le entreguen a partir del primer periodo una suma que inicie con $3.000.000 y a partir del segundo año disminuya en una cierta suma anual que le sea atractiva. Si el tiempo es de 3 años y la tasa del 10% efectivo anual, ¿de cuánto debe ser ese gradiente?

El problema entrega:

VA=$50.000.000
A= $3.000.000
i= 10%EA
n=3 años

Como la tasa es efectiva y reemplazando los valores respectivos se tiene:

$$G = \left[\frac{VA + \left\{ A \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \right\}}{\frac{1}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}} \right]} \right]$$

$$G = \left[\frac{50.000.000 + \left\{ 3.000.000 \left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-3}}{0{,}10} \right] \right\}}{\frac{1}{0{,}10}\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-3}}{0{,}10} - \frac{3}{(1+0{,}10)^{3}} \right]} \right]$$

$$G = \left[\frac{50.000.000 + [3.000.000 X 2.486851991]}{\frac{1}{0{,}10}[2.486851991 - 2{,}253944403]} \right]$$

$$G = \frac{50.000.000 + 7.460.555{,}97}{2.32907588}$$

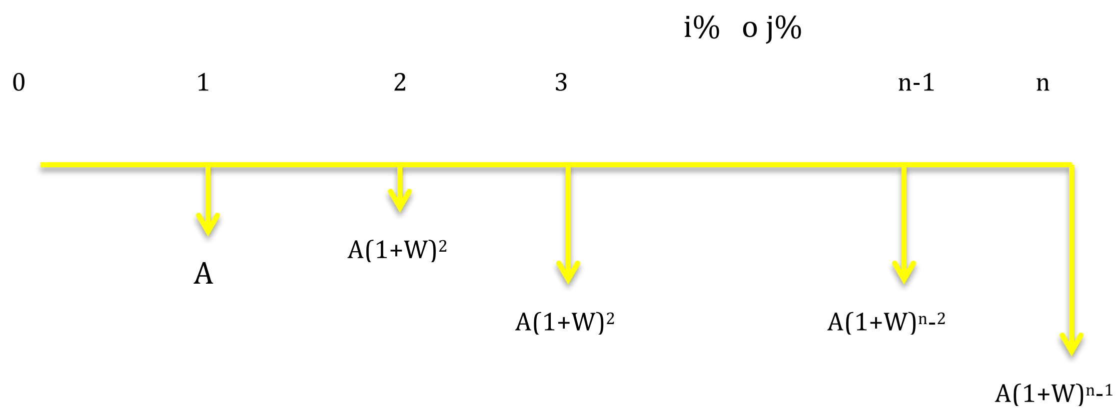
$$G = 2.467.096{,}93$$

La cantidad en que se debe incrementar la cuota anual para cumplir las expectativas de Santiago es de $2.467.096,93.

5.3 Gradiente geométrico

Anualidad con gradiente geométrico creciente

Si la serie de pagos periódicos vencidos A va aumentando de un periodo a otro en porcentaje w%, a una tasa de interés i% por periodo, se dice que es un gradiente geométrico creciente. Gráficamente se representa así:



Dónde:

A= serie uniforme
W= gradiente geométrico

Cálculo del valor futuro

El valor futuro de este tipo de serie de pagos periódicos se comporta como una función continua de forma $f(n) = A(1+w)^n$, es decir, una función exponencial de base (1+w) y coeficiente A. Al aplicar el proceso para resolver este tipo de funciones, se tiene:

$$VF = \frac{A}{i-w}\left[(1+i)^n - (1+w)^n\right]$$

Esta es la fórmula a aplicar si la tasa es efectiva. Si la tasa es nominal, la fórmula se convierte en:

$$VF = \frac{A}{\frac{j}{m} - w}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - (1+w)^{nxm}\right]$$

Estas fórmulas funcionan si (i) o (j/m) son diferentes de w. Para los casos en que sean iguales, las ecuaciones a aplicar serían:

A tasa efectiva:

$$VF = nA(1+i)^{n-1}$$

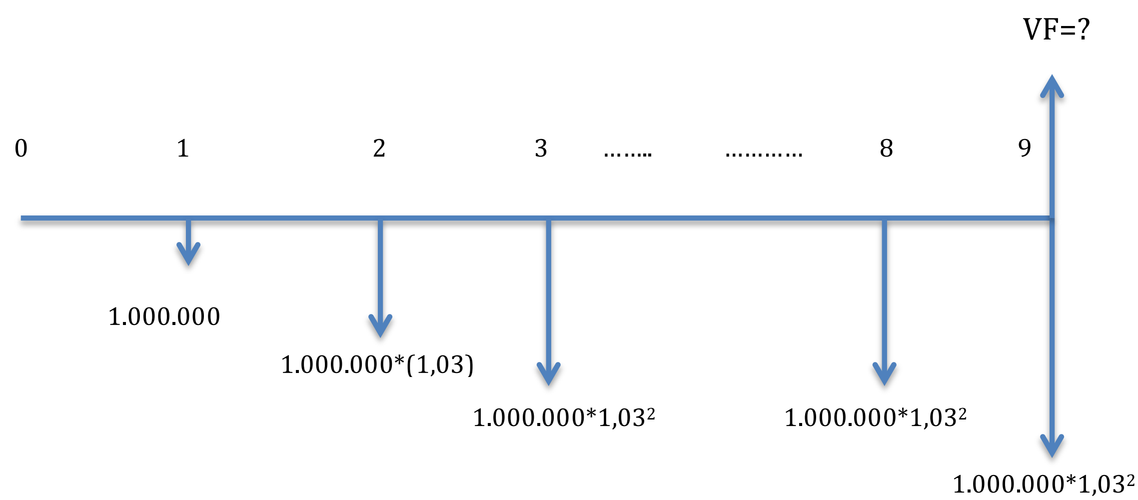
A tasa nominal:

$$VF = nxmA\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm-1}$$

Ejemplo

Marcos inicia un fondo aportando $1.000.000 y a partir del segundo año incrementa sus cuotas en un 3% anual. Si la tasa que le reconocen es del 8% anual y el tiempo son 9 años, ¿cuánto podrá acumular al cabo de 9 años?

Gráficamente el problema se ve así:



Los datos suministrados son:

A= $1.000.000
W= 3%
i= 8% EA
n = 9 años

Como i ≠ w, se utiliza la ecuación de tasa efectiva para estos casos y se obtiene:

$$VF = \frac{A}{i-w}\left[(1+i)^n - (1+w)^n\right]$$

$$VF = \frac{1.000.000}{0,08-0,03}\left[(1+0,08)^9 - (1+0,03)^9\right]$$

$$VF = \frac{1.000.000}{0,05}\left[1.999004627 - 1.304773184\right]$$

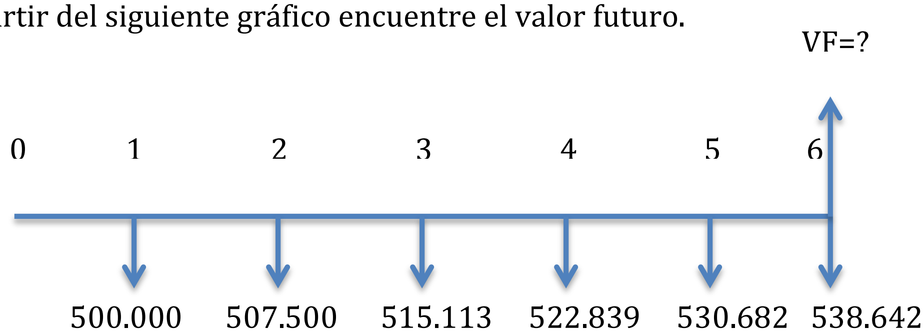
$$VF = 200.000.000x0,6942314433$$

$$VF = 138.846.288.7$$

Marcos podrá retirar dentro de 9 años $138.846.288,70.

Ejemplo

A partir del siguiente gráfico encuentre el valor futuro.



J=3%

La representación gráfica permite deducir que esta es una anualidad con gradiente geométrico creciente, ya que se puede extraer una anualidad uniforme de $500.000 semestral y un gradiente geométrico creciente del 1,5% semestral; la tasa es del 3% con capitalización semestral y el tiempo de 6 semestres.

A= $500.000
w= 1,5%
j= 3% CCS
m= 2
nxm= 6 semestres

En este caso j=w y como la tasa es nominal, se utiliza la fórmula correspondiente a este tipo así:

$$VF = nxmA\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm-1}$$

$$VF = 6x500.000\left(1+\frac{0,03}{2}\right)^{6-1}$$

$$VF = 3.000.000x1,015^{5}$$

$$VF = 3.000.000x1,077284004$$

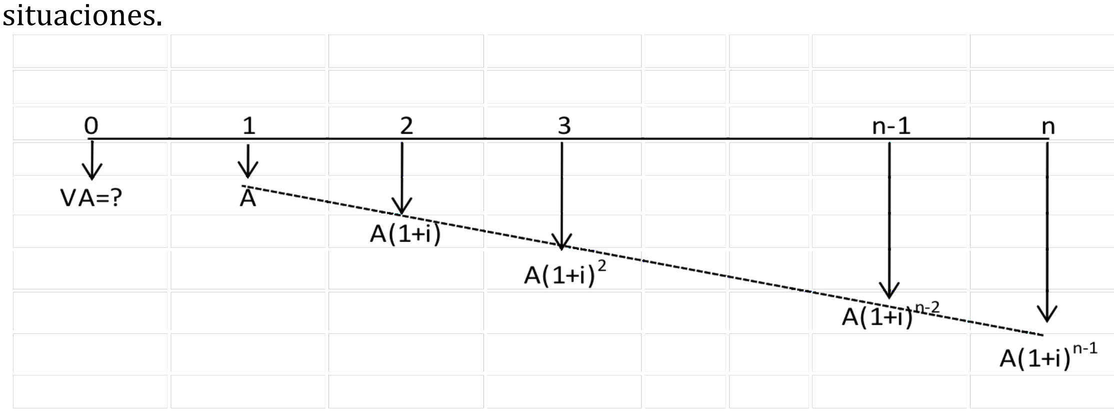
$$VF = 3.231.852,01$$

El valor futuro solicitado a partir del gráfico es de $3.231.852,01

Nota: En este tipo de anualidades no se calcula ni el valor de la cuota periódica ni la del gradiente.

Cálculo del valor presente

Partiendo del gráfico representativo del cálculo del valor presente de una anualidad con gradiente geométrico creciente, se deducirán las fórmulas a utilizar en este tipo de situaciones.



A tasa efectiva:

$$VA = \frac{A}{i-w}\left[1-\left(\frac{(1+w)}{(1+i)}\right)^{n}\right]$$

A tasa nominal:

$$VA = \frac{A}{\frac{j}{m}-w}\left[1-\left(\frac{(1+w)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)}\right)^{nxm}\right]$$

Dónde:

VA = valor presente
A= cuota periódica uniforme
G= gradiente aritmético
i= tasa efectiva
j= tasa nominal
n= tiempo
m= periodos de capitalización en un año
nxm = periodos de pago total

Estas fórmulas se aplican si (i) o (j/m) son ≠ a w. En caso contrario la fórmula utilizada será:

A tasa efectiva

$$VA = \frac{nA}{1+i}$$

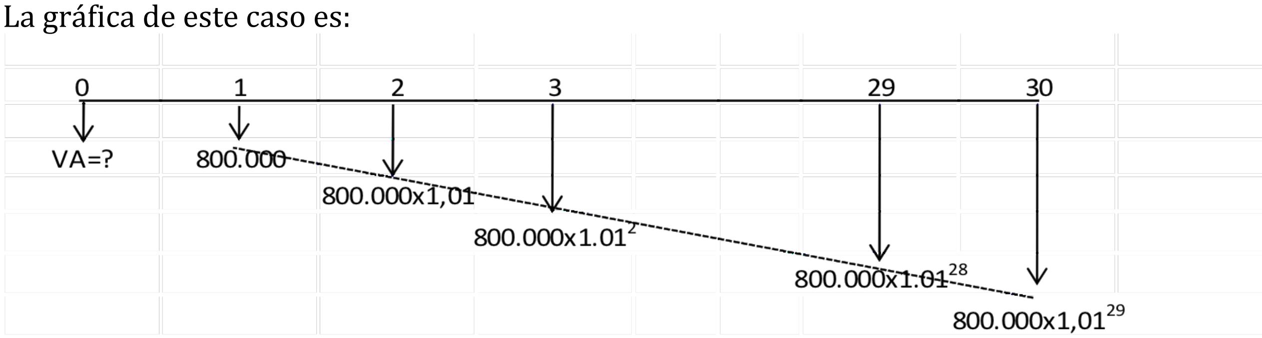
A tasa nominal:

$$VA = \frac{nxmA}{1+\frac{j}{m}}$$

Ejemplo

Hallar el valor presente de una serie de pagos que se inician con $800.000 bimestrales y a partir del segundo bimestre crecen en 1% bimestrales. El tiempo de pago son 5 años y la tasa del 1% efectiva bimestral.

La gráfica de este caso es:



El caso reporta los siguientes datos:

A= $800.000 bimestrales
w=1% bimestrales
i= 1% EB
n= 5 años X 6 = 30 bimestres

Aquí i=w y como la tasa es efectiva, al utilizar la fórmula correspondiente se obtiene:

$$VA = \frac{nA}{1+i}$$
$$VA = \frac{30x800.000}{1+0{,}01}$$
$$VA = \frac{24.000.000}{1{,}01}$$
$$VA = 23.762.376.24$$

El valor presente de pagos que se inician con $800.000 bimestrales y a partir del segundo bimestre crecen en un 1% bimestral a una tasa de1% efectiva bimestral, durante 5 años, es de $23.762.376.24.

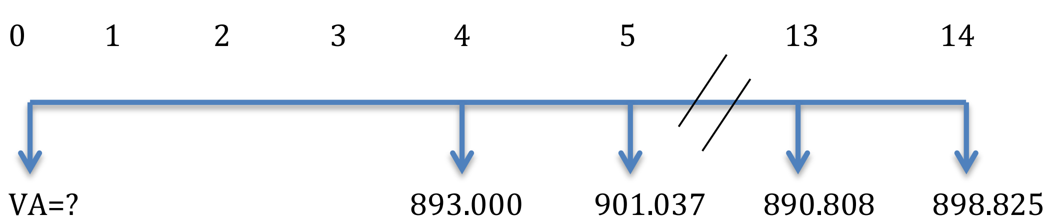
Ejemplo

¿A cuánto equivalen hoy una serie de pagos que se inician en el tercer cuatrimestre con $893.000 cuatrimestrales y a partir del 4 cuatrimestre se incrementan en un 0,9% cuatrimestralmente? El tiempo son 4 años 8 meses y la tasa del 4,5% con capitalización cuatrimestral.

Este problema contiene un gradiente geométrico creciente con tasa nominal, el cual comienza en el periodo tres, pero como debe hallarse el valor presente en el momento cero es necesario:

1. Calcular el valor presente de la anualidad utilizando la ecuación respectiva, el cual queda en el periodo 3.

2. El VA encontrado debe llevarse al momento cero (0), a través del valor presente de un pago único.



j= 4,5%

A=$893.000
w=0,9%
j=4,5%CCC j/m= 0,045/3=0,015
m=3
nxm =14 cuatrimestres 4x3=12 +(8/4=2)

1. Como j/m≠w y la tasa es nominal se utiliza la fórmula:

$$VA_1 = \frac{A}{\frac{j}{m} - w}\left[1 - \left(\frac{(1+w)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)}\right)^{nxm}\right]$$

$$VA_1 = \frac{893.000}{\frac{0{,}045}{3} - 0{,}009}\left[1 - \left(\frac{(1+0{,}009)}{\left(1+{}^{0{,}045}\!/_{3}\right)}\right)^{14}\right]$$

$$VA_1 = \frac{893.000}{0{,}015 - 0{,}009}\left[1 - \left(\frac{1{,}009}{1{,}015}\right)^{14}\right]$$

$$VA_1 = \frac{893.000}{0{,}006}\left[1 - (0{,}99408867)^{14}\right]$$

$$VA_1 = 148.833.333.33[1 - 0{,}9203472847]$$

$$VA_1 = 148.833.333{,}33x0{,}0796527143$$

$$VA_1 = 11.854.978{,}98$$

2.

$$VA = VA_1\left(1{,}015^{-3}\right)$$

$$VA = 11.854.978{,}98x0{,}9563169937$$

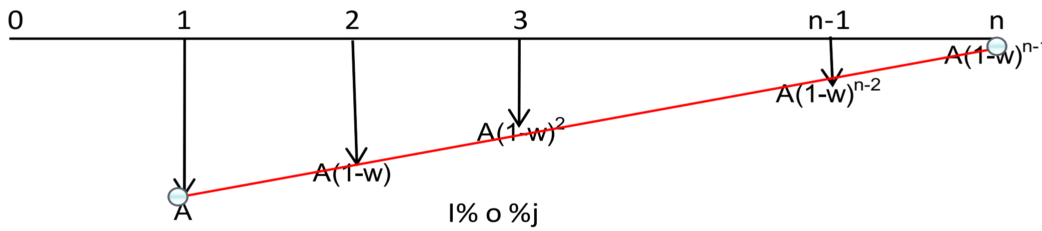
$$VA = 11.337.117{,}86.$$

Los $893.000 que se incrementan en un 0,9% cuatrimestralmente durante 14 cuatrimestres a una tasa del 4,5% con capitalización cuatrimestral, equivalen hoy a $ 11.337.117,86.

Al igual que con el valor futuro, aquí no se calculan ni la cuota periódica uniforme ni el gradiente geométrico.

Anualidad con gradiente geométrico decreciente

Si la serie de pagos periódicos vencidos A va disminuyendo de un periodo a otro en porcentaje w a una tasa de interés i% por periodo, se dice que es un gradiente geométrico decreciente. Gráficamente se representa así:



Dónde:

A= serie uniforme
W= gradiente geométrico

Cálculo del valor futuro

Para calcular el valor presente de una anualidad con gradiente geométrico decreciente, se utilizan las siguientes fórmulas:

$$VF = \frac{A}{i+w}\left[(1+i)^n - (1-w)^n\right]$$

Esta es la fórmula a aplicar si la tasa es efectiva. Si la tasa es nominal la fórmula se convierte en:

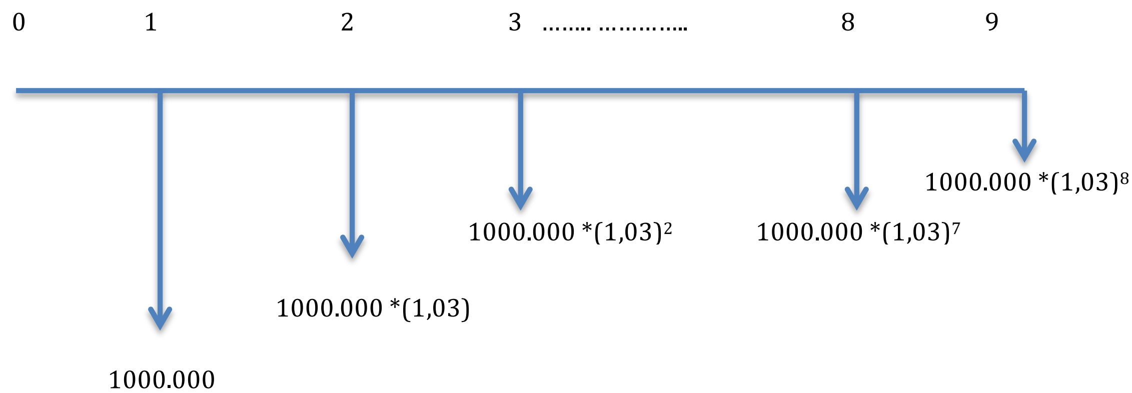
$$VF = \frac{A}{\frac{j}{m}+w}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - (1-w)^{nxm}\right]$$

Estas fórmulas funcionan si (i) o (j/m) son diferentes de w. Para los casos en que sean iguales, se reemplaza i o j/m por w o viceversa en las fórmulas antes expresadas.

Ejemplo

Marcos inicia un fondo aportando $1.000.000 y a partir del segundo año disminuye sus cuotas en un 3% anual. Si la tasa que le reconocen es del 8% anual y el tiempo son 9 años, ¿cuánto podrá acumular?

Gráficamente el problema se ve así:



Los datos suministrados son:

A= $1.000.000
W= 3%
i= 8% EA
n = 9 años.

Como i ≠ w se utiliza la ecuación de tasa efectiva para estos casos y se obtiene:

$$VF = \frac{A}{i+w}\left[(1+i)^n - (1-w)^n\right]$$

$$VF = \frac{1.000.000}{0{,}08+0{,}03}\left[(1+0{,}08)^9 - (1-0{,}03)^9\right]$$

$$VF = \frac{1.000.000}{0{,}11}\left[1.999004627 - 0{,}7602310587\right]$$

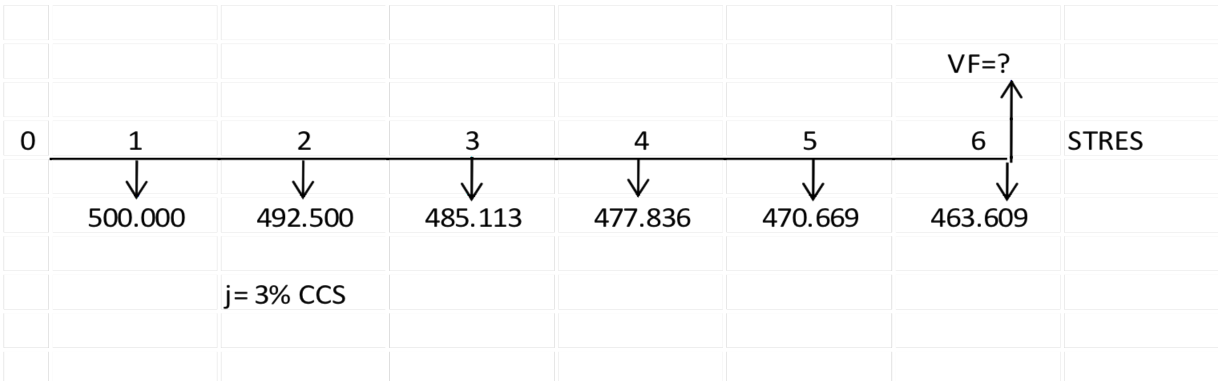
$$VF = 9.090.909{,}10x1.304773184$$

$$VF = 11.861.574{,}41$$

Marcos podrá retirar dentro de 9 años, $11.861.574,41

Ejemplo

A partir del siguiente gráfico encuentre el valor futuro.



La representación gráfica permite deducir que esta es una anualidad con gradiente geométrico decreciente, ya que se puede extraer una anualidad uniforme de $500.000 semestral y un gradiente geométrico decreciente del 1,5% semestral. La tasa es del 3% con capitalización semestral y el tiempo de 6 semestres.

A= $500.000
w= 1,5%
j= 3%CCS = j/m=0,015
m= 2
nxm= 6 semestres

En este caso j=w y como la tasa es nominal, se utiliza la fórmula correspondiente a este tipo así:

$$VF = \frac{A}{\frac{j}{m} + w}\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nxm} - (1 - w)^{nxm}\right]$$

$$VF = \frac{500.000}{\frac{0,03}{2} + 0,015}\left[\left(1 + {}^{0,03}\!/_{2}\right)^{6} - (1 - 0,015)^{6}\right]$$

$$VF = \frac{500.000}{0,015 + 0,015}\left[1,015^{6} - 0,985^{6}\right]$$

$$VF = 16.666.666,67x0.1801350091$$

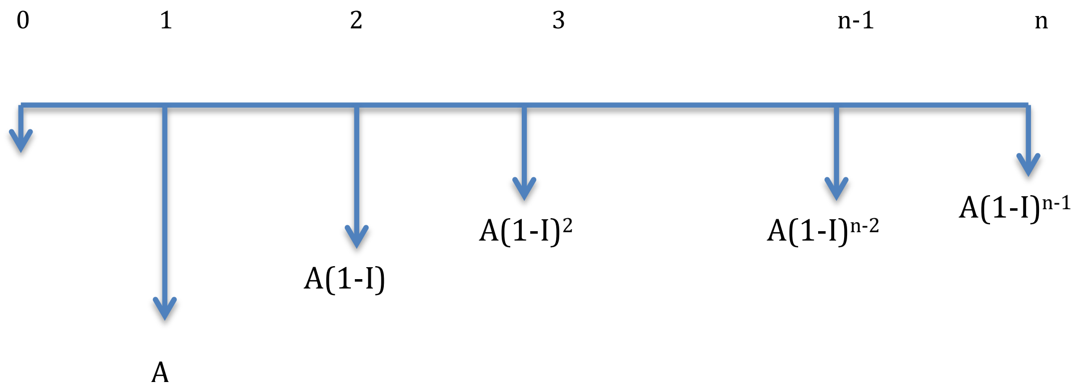
$$VF = 3.002.250,15$$

El valor futuro solicitado a partir del gráfico es $3.002.250,15

Nota: En este tipo de anualidades, como en las de gradiente geométrico creciente, no se calcula ni el valor de la cuota periódica ni la del gradiente.

Cálculo del valor presente

Gráficamente el valor presente de una anualidad con gradiente geométrico decreciente se ve así:



Las fórmulas a utilizar en este caso son:

A tasa efectiva:

$$VA = \frac{A}{i+w}\left[1-\left(\frac{(1-w)}{(1+i)}\right)^{n}\right]$$

A tasa nominal:

$$VA = \frac{A}{\frac{j}{m}+w}\left[1-\left(\frac{(1-w)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)}\right)^{nxm}\right]$$

Dónde:

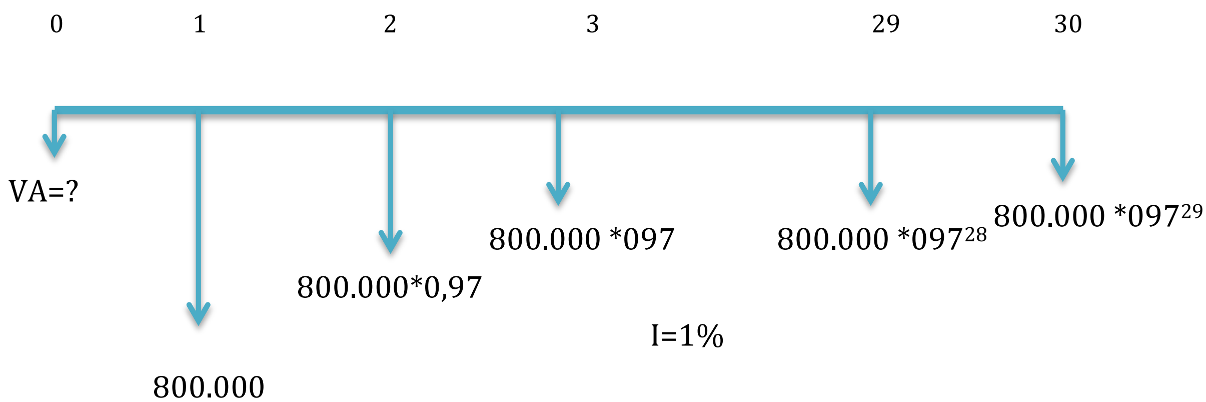
VA = valor presente
A= cuota periódica uniforme
G= gradiente aritmético
i= tasa efectiva
j= tasa nominal
n= tiempo
m= periodos de capitalización en un año
nxm = periodos de pago total

Estas fórmulas se aplican si (i) o (j/m) son ≠ a w. En caso contrario en las fórmulas se reemplazan i o j/m por w o viceversa.

Ejemplo

Hallar el valor presente de una serie de pagos que se inician con $800.000 bimestrales y a partir del segundo bimestre decrecen en 1% bimestrales. El tiempo de pago son 5 años y la tasa del 1% efectiva bimestral.

La gráfica de este caso es:



El caso reporta los siguientes datos:

A= $800.000 bimestrales
w=1%. Bimestrales
i= 1% EB
n= 5 años X 6 = 30 bimestres

Aquí i=w y como la tasa es efectiva, al utilizar la fórmula correspondiente se obtiene:

$$VA = \frac{A}{i+w}\left[1-\left(\frac{(1-w)}{(1+i)}\right)^{n}\right]$$

$$VA = \frac{800.000}{0{,}01+0{,}01}\left[1-\left(\frac{(1-0{,}01)}{1+0{,}01}\right)^{5x6}\right]$$

$$VA = \frac{800.000}{0{,}02}\left[1-\left(\frac{0{,}99}{1{,}01}\right)^{30}\right]$$

$$VA = 40.000.000\left[1-0{,}9801980198^{30}\right]$$

$$VA = 40.000.000x(1-0{,}5488006593)$$

$$VA = 18.047.973{,}63$$

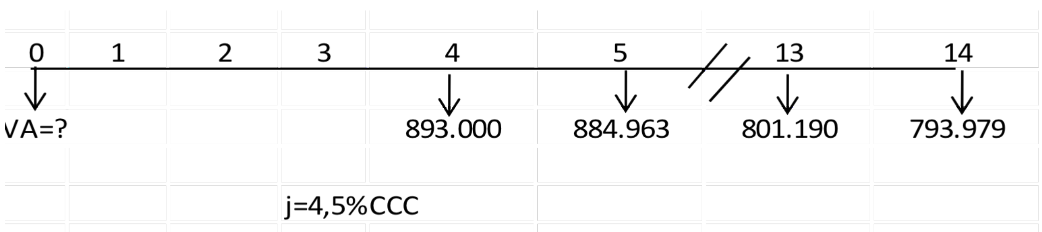
El valor presente de pagos que se inician con $800.000 bimestrales y a partir del segundo bimestre decrecen en un 1% bimestral a una tasa de 1% efectiva bimestral, durante 5 años, es de $18.047.973,63

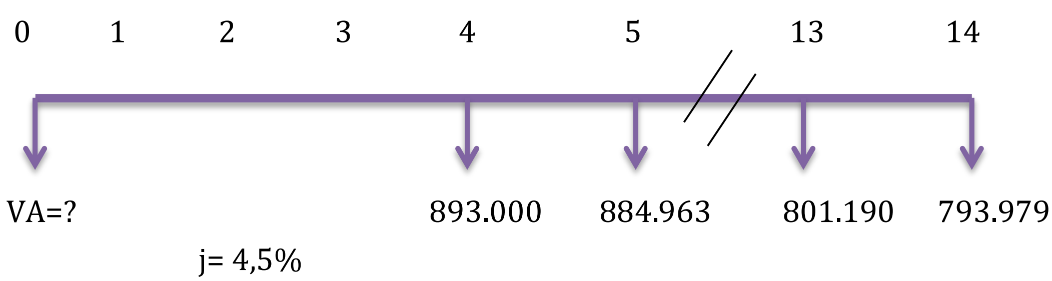
Ejemplo

¿A cuánto equivalen hoy una serie de pagos que se inician en el tercer cuatrimestre con $893.000 cuatrimestrales y a partir del 4 cuatrimestre disminuyen en un 0,9% cuatrimestralmente? El tiempo son 4 años 8 meses y la tasa del 4,5% con capitalización cuatrimestral.

Este problema contiene un gradiente geométrico creciente con tasa nominal, el cual comienza en el periodo tres, pero como debe hallarse el valor presente en el momento cero es necesario:

1. Calcular el valor presente de la anualidad utilizando la ecuación respectiva, el cual queda en el periodo 3.
2. El VA encontrado debe llevarse al momento cero (0), a través del valor presente de un pago único.





A=$893.000
w=0,9%
j=4,5%CCC j/m= 0,045/3=0,015
m=3
nxm=14 cuatrimestres 4x3=12 +(8/4=2)

Como j/m≠w y la tasa es nominal, se utiliza la fórmula:

$$VA_1 = \frac{A}{\frac{j}{m}+w}\left[1-\left(\frac{(1-w)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)}\right)^{nxm}\right]$$

$$VA_1 = \frac{893.000}{\frac{0{,}045}{3}+0{,}009}\left[1-\left(\frac{(1-0{,}009)}{\left(1+0{,}045/3\right)}\right)^{14}\right]$$

$$VA_1 = \frac{893.000}{0{,}015+0{,}009}\left[1-\left(\frac{0{,}991}{1{,}015}\right)^{14}\right]$$

$$VA_1 = \frac{893.000}{0{,}024}\left[1-(0{,}9763546798)^{14}\right]$$

$$VA_1 = 37.208.333{,}33[1-0{,}7153302176]$$

$$VA_1 = 37.208.333{,}33x0{,}2846697824$$

$$VA_1 = 10.592.088{,}15$$

2.

$$VA = VA_1\left(1{,}015^{-3}\right)$$

$$VA = 10.592.088{,}15x0{,}9563169937$$

$$VA = 10.129.393{,}90$$

Los \$893.000 que disminuyen en un 0,9% cuatrimestralmente, durante 14 cuatrimestres a una tasa del 4,5% con capitalización cuatrimestral, equivalen hoy a \$10.129.393,90.

Al igual que con el valor futuro, no se calculan ni la cuota periódica uniforme ni el gradiente geométrico.

5.4 Amortización y/o capitalización

La amortización se define como el pago que se hace periodo a periodo de una obligación durante un tiempo dado y a una determinada tasa de interés. La amortización tiene su máxima expresión en la tabla de amortización.

En la amortización se manejan los siguientes términos:

- **Periodo**: Representa el momento en el cual se hace el pago.
- **Saldo inicial (SI):** Cantidad que se debe del préstamo al inicio de un determinado periodo.
- **Intereses (I):** Costo del préstamo por periodo de pago.
- **Cuota (A):** Valor que se cancela cada periodo. Puede ser uniforme o variable y su cálculo depende del tipo de anualidad que se trabaje. Equivale al valor de cuota a partir de valor presente.
- **Amortización:** Es la cantidad que de la cuota va a cancelar realmente el préstamo.
- **Saldo final:** Es la cantidad adeudada al final de cada periodo.

Tabla de amortización

Para saber qué cantidad se va amortizando en cada periodo de pago, se utiliza la tabla de amortización cuya presentación es:

El proceso para elaborar la tabla es el siguiente:

1. Identificar los elementos del problema.
2. Calcular el valor de la cuota periódica.
3. Construir el esquema de la tabla.
4. Calcular cada uno de los elementos que la constituyen.

Para hacer más directo el aprendizaje de cómo realizar una tabla de amortización, la explicación se hará basada en un ejemplo.

Suponga que el Banco XXX le ofrece un préstamo de libre inversión por $2.000.000 a dos años de plazo, con cuotas semestrales vencidas y una tasa del 1,5% con capitalización semestral. Usted quiere saber, paso a paso, cómo será el pago de este préstamo para decidir si le conviene.

Siguiendo el procedimiento antes descrito se tiene:

1. Identificar los elementos del problema:

   VA= \$2.000.000
   n = 2 años
   j = 1,5% CCS
   m= 2 el año tiene 2 semestres

2. Calcular el valor de la cuota periódica.

Como es cuota vencida se utiliza la fórmula

$$A = \left[\frac{VA}{\dfrac{1-\left(\dfrac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\dfrac{j}{m}}} \right]$$

$$A = \left[\frac{2.000.000}{\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{0,015}{2}\right)^{-2x2}}{\dfrac{0,015}{2}}\right]} \right]$$

$$A = \left[\frac{2.000.000}{3.92611041} \right]$$

$$A = 509.410,02$$

Para facilitar las operaciones se trabajará con \$509.410.

3. Construir el esquema de la tabla.

4. Calcular cada uno de los componentes de la tabla.

a. El primer paso es colocar el valor de la cuota en su casilla como es uniforme y vencida, se coloca en su espacio a partir del periodo 1.

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1			509.410		
2			509.510		
3			509.410		
4			509.410		

b. El saldo final de un periodo es el inicial del periodo siguiente, por eso los \$2.000.000 que aparecen en el año 0 como saldo final, se colocan como saldo inicial en el año 1.

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000		509.410		
2			509.510		
3			509.410		
4			509.410		

c. Se calculan los intereses del primer periodo así:

Saldo inicial X tasa de interés semestral = 2.000.000 x 0,015/2 = 2.000.000x0,0075=15.000 y se ubica en su sitio.

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000	15.000	509.410		
2			509.510		
3			509.410		
4			509.410		

d. Se calcula la amortización que es igual a la cuota menos los intereses del periodo así: 509410-15.000 = 394.410 y se ubica en su puesto así:

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000	15.000	509.410	494.410	
2			509.510		
3			509.410		
4			509.410		

e. Se calcula el saldo final que es igual al saldo inicial menos la amortización, es decir, 2.000.000-394.410 = 1.605.590 y se ubica en su casilla así:

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000	15.000	509.410	494.410	1.505.590
2			509.510		
3			509.410		
4			509.410		

Se repiten las operaciones para el segundo periodo así:

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000	15.000	509.410	494.410	1505.590
2	1.505.590	11.293	509.510	498.117	1.107.473
3			509.410		
4			509.410		

Ahora para el tercero así:

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000	15.000	509.410	494.410	1.505.590
2	1.505.590	11.293	509.510	498.117	1.007.473
3	1.007.473	7.556	509.410	501.854	505.619
4			509.410		

Y por último, para el cuarto periodo así:

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000	15.000	509.410	494.410	1.505.590
2	1.505.590	11.293	509.510	498.117	1.108. 222
3	1.007.473	7.556	509.410	501.854	505.619
4	505.619	3.793	509.410	505.617	2

La idea es que el saldo final del último periodo sea cero; la diferencia está dada por los decimales con los que se trabajó.

Para confirmar que lo que se hizo está bien, la suma de las amortizaciones debe ser al valor del préstamo, en este caso $2.000.000, y al sumar la columna de intereses se sabe cuánto se pagó de intereses.

PERIODOS	SALDO INICIAL	INTERESES	CUOTA	AMORTIZACIÓN	SALDO FINAL
0	2.000.000	0	0	0	2.000.000
1	2.000.000	15.000	509.410	494.410	1.505.590
2	1.505.590	11.293	509.510	498.117	1.108. 222
3	1.007.473	7.556	509.410	501.854	505.619
4	505.619	3.793	509.410	505.617	2
Total		37.642		1.999,998	

Fondo de capitalización

Por otro lado, existe la capitalización, es decir, ir ahorrando periodo a periodo una determinada cantidad para retirar en un determinado tiempo y a una tasa de interés compuesta dada, una suma de dinero preestablecida. Al igual que en la amortización, existe una tabla para saber de antemano, cómo se va alcanzando la suma deseada. A esta tabla se le conoce como fondo de capitalización.

En este caso, los conceptos tienen el siguiente significado:

- **Periodo**: Representa el momento en el cual se hace el depósito.
- **Intereses** (I): Cantidad de intereses recibidos en el periodo.
- **Cuota** (A): Valor que se deposita cada periodo. Puede ser uniforme o variable y su cálculo depende del tipo de anualidad que se trabaje; equivale al valor de cuota a partir de valor futuro.
- **Valor agregado al fondo**: Es la cantidad en la que crece el ahorro por periodo.
- **Saldo final**: Es la cantidad ahorrada hasta el periodo respectivo.

El proceso para elaborar el fondo de capitalización es:

1. Identificar los elementos del problema.
2. Calcular el valor de la cuota periódica
3. Construir el esquema del fondo.
4. Calcular cada uno de los elementos que la constituyen.

Para hacer más directo el aprendizaje de cómo realizar un fondo de capitalización, la explicación se hará basada en un ejemplo.

Suponga que debe pagar una deuda de $2.000.000 dentro de 2 años y para hacerlo constituye un fondo que le permita pagarlo sin problema. La tasa de interés que le reconocen es del 1,5% con capitalización semestral y los depósitos deben ser semestrales también. A fin de saber periodo a periodo cómo se comporta el fondo, usted quiere construir el fondo de capitalización.

Siguiendo el procedimiento antes descrito se tiene:

1. Identificar los elementos del problema:

    a. VF= $2.000.000
    b. n = 2 años
    c. j = 1,5% CCS
    d. m= 2 el año tiene 2 semestres

2. Calcular el valor de la cuota periódica.

    Como es cuota vencida se utiliza la fórmula:

$$A = \left[\frac{VF}{\frac{1-\left(\frac{j}{m}\right)^{nxm}}{\frac{j}{m}}} \right]$$

$$A = \left[\frac{2.000.000}{\left[\frac{1-\left(\frac{0{,}015}{2}\right)^{2x2}}{\frac{0{,}015}{2}}\right]} \right]$$

$$A = \left[\frac{2.000.000}{4.045225422} \right]$$

$$A = 494.410{,}02$$

    Para facilitar las operaciones se trabajará con $494.410

3. Construir el esquema del fondo.

FONDO DE AMORTIZACIÓN

PERIODOS	CUOTA	INTERESES	TOTAL AGREGADO AL FONDO	SALDO FINAL

4. Calcular cada uno de los componentes de la tabla.

   El primer paso es colocar el valor de la cuota en su casilla. Como es uniforme y vencida, se coloca en su espacio a partir del periodo 1.

PERIODOS	CUOTA	INTERESES	TOTAL AGREGADO AL FONDO	SALDO FINAL
0	0	0	0	0
1	494.410			
2	494.410			
3	494.410			
4	494.410			

PERIODOS	CUOTA	INTERESES	TOTAL AGREGADO AL FONDO	SALDO FINAL
0	0	0	0	0
1	494.410	0	0	494.410
2	494.410			
3	494.410			
4	494.410			

Se calcula el valor de los intereses para el segundo año, es decir, = 494.410x0,015/2= 3.708 y el total agregado al fondo que es igual a la cuota más los intereses.

PERIODOS	CUOTA	INTERESES	TOTAL AGREGADO AL FONDO	SALDO FINAL
0	0	0	0	0
1	494.410	0	0	494.410
2	494.410	3.708	498.118	
3	494.410			
4	494.410			

Se calcula el saldo final que será igual al saldo inicial + la capitalización, en este caso, 0+498.118.

PERIODOS	CUOTA	INTERESES	TOTAL AGREGADO AL FONDO	SALDO FINAL
0	0	0	0	0
1	494.410	00	0	494410
2	494.410	3.708	498.118	992.528

Los intereses del tercer periodo en adelante son iguales al saldo final por la tasa de interés así: 996.264x0,0075=7.472

Se repiten las operaciones para el tercer periodo así:

PERIODOS	CUOTA	INTERESES	TOTAL AGREGADO AL FONDO	SALDO FINAL
0	0	0	0	0
1	494.410	0	0	494.410
2	494.410	3.708	498.118	992.528
3	494.410	7.444	501.852	1.494.382

Ahora para el cuarto periodo así:

PERIODOS	CUOTA	INTERESES	TOTAL AGREGADO AL FONDO	SALDO FINAL
0	0	0	0	0
1	494.410	0	0	494.410
2	494.410	3.708	498.118	996.264
3	494.410	7.444	501.852	1.494.382
4	494.410	11.208	505.618	2.000.000

Resumen

Las series variables son cuotas periódicas que varían, bien sea en forma de una progresión aritmética o geométrica. Pueden darse en forma creciente o decreciente. Regularmente se les llama anualidades con gradiente aritmético o anualidades con gradiente geométrico. En cada una de ellas, se puede calcular el valor futuro y el valor presente.

El valor futuro y el valor presente de cualquier tipo de anualidad, tienen como herramienta de presentación, tanto el fondo de capitalización como la tabla de amortización, que son de gran ayuda para ir visualizado, periodo a periodo cómo se va a comportar, tanto el valor futuro como el valor presente.

Bibliografía

- Aliaga, C, y Aliaga, C. Matemáticas Financieras, un enfoque práctico. Editorial PRENTICE.
- Díaz A, Y Aguilera, V. Matemáticas financieras. Editorial Mc Graw Hill, Tercera edición.
- García, J. Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita. Editorial Pearson.
- Gómez, A. Matemáticas Financieras. Editorial Universidad del Quindío.
- Portus, L. (2003). Matemáticas financieras, Editorial Mac Graw Hill.