UNIDAD 4. ANUALIDADES PAGO UNIFORME

Anualidades pago uniforme

Tabla de contenido

UNIDAD 4. ANUALIDADES pago UNIFORME 1
Tabla de contenido 2
Introducción 3
Objetivos 3
Objetivo general 3
Objetivos específicos 3
4.1 Definición y clasificación 4
4.2 Anualidades vencidas 4
4.2.1 Cálculo del valor futuro 5
4.3 Anualidades anticipadas 16
4.4 Anualidades diferidas 33
4.5 Anualidades perpetuas 39
Resumen 41
Bibliografía 44

Introducción

En esta unidad se trabajarán las herramientas necesarias para resolver situaciones financieras en las cuales aparezcan series de pagos –anualidades- que sean uniformes.

Objetivos

Objetivo general

Resolver e interpretar problemas que involucran anualidades o series uniformes.

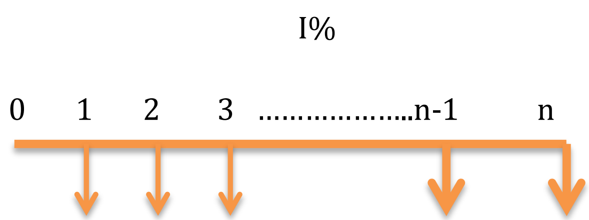
Objetivos específicos

- Reconocer lo que es una anualidad y clasificarla.
- Resolver problemas de valor futuro, valor presente, cálculo del valor de la cuota periódica y tiempo a partir de valor futuro o valor presente para una anualidad vencida.
- Resolver problemas de valor futuro, valor presente, cálculo del valor de la cuota periódica y tiempo a partir de valor futuro o valor presente para una anualidad anticipada.
- Resolver problemas de valor presente, cálculo del valor de la cuota periódica y tiempo a partir de valor presente para una anualidad diferida.
- Resolver problemas de valor presente, cálculo del valor de la cuota periódica y la tasa de interés para una anualidad perpetua.

4.1 Definición y clasificación

No siempre las operaciones financieras se realizan con pago único. Así, por ejemplo, cuando se adquiere un bien o servicio que se paga en cuotas, bien sea mensuales, trimestrales o semestrales, etc., se está trabajando con una serie de pagos que pueden ser iguales (uniformes) o desiguales, llamados también anualidades o cuotas periódicas, según corresponda.

Gráficamente los pagos periódicos uniformes se pueden representar así:



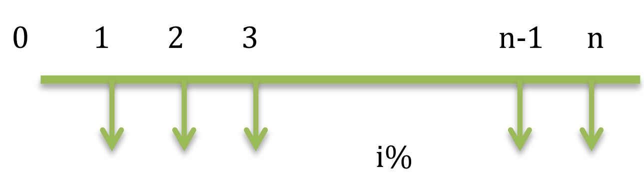
La simbología generalmente utilizada en este tipo de operaciones es:

VA	Valor presente
VF	Valor futuro
A	cuota periódica
n	tiempo
i	tasa de interés efectiva
j	tasa de interés nominal
m	Periodos de capitalización

4.2 Anualidades vencidas

Cuando las cuotas periódicas se depositan al final del periodo (año, mes, trimestre, etc.), se dice que la operación es vencida.

Gráficamente este tipo de cuotas periódicas se representan así:



4.2.1 Cálculo del valor futuro

Cada depósito de A realizado al final del periodo gana interés compuesto hasta el momento final, capitalizando los intereses en cada uno de los periodos que le siguen. El primer depósito capitaliza durante (n-1) periodos; el segundo (n-2) periodos y así sucesivamente hasta el último depósito que no gana intereses, ya que su tiempo coincide con la fecha de término de la operación. Así, el valor futuro se encuentra por la suma de cada factor, a saber:

$$VF = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \ldots. + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1}$$

Factorizando esta ecuación se llega a la expresión:

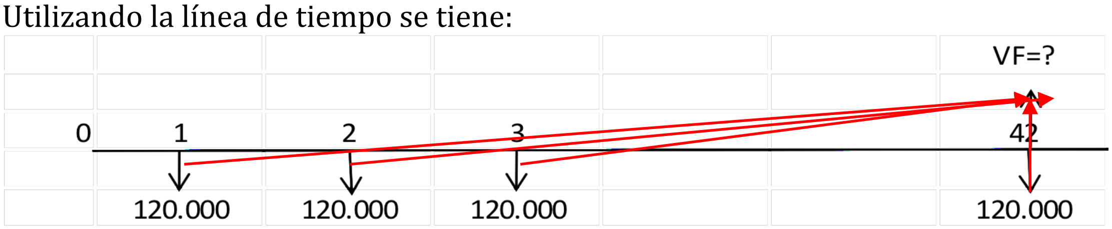
$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Esta fórmula se utiliza cuando se quiere hallar el valor futuro de pagos periódicos vencidos a tasa efectiva.

Ejemplo

Tatiana está en el tercer año de su pregrado y quiere hacer una especialización. Para ello, comienza un fondo depositando al final de cada mes $120.000 a una tasa del 0,6% efectivo mensual. Si el tiempo que debe trascurrir es de 3,5 años, ¿qué cantidad podrá acumular?

Utilizando la línea de tiempo se tiene:



En este caso:

A=$120.000
i= 0,6% EM
n= 3,5 años = 3x12=36 + (0,5x12)=6= 42 meses

Reemplazando los valores en la fórmula:

$$VF = 120.000\left[\frac{(1+0{,}006)^{42}-1}{0{,}006}\right]$$

$$VF = 120.000\left[\frac{(1{,}006)^{42}-1}{0{,}006}\right]$$

$$VF = 120.000\left[\frac{1{,}28562761-1}{0{,}006}\right]$$

$$VF = 120.000\left[\frac{0{,}28562761}{0{,}006}\right]$$

$$VF = 120.000x47{,}6046014$$

$$VF = \$5.712.552{,}17$$

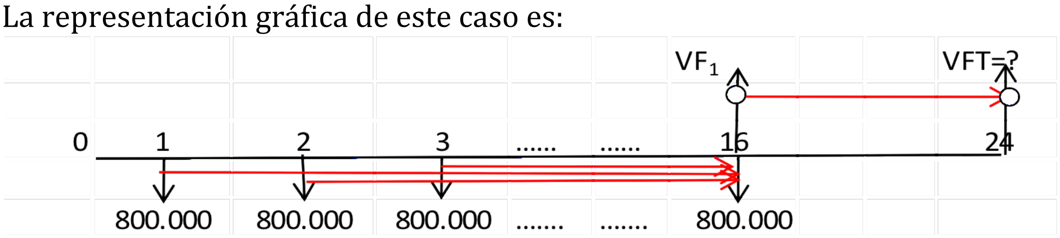
Tatiana podrá retirar a los 3,5 años, $5.712.552,17 si deposita al final de cada mes $120.000 a una tasa del 0,6% efectiva mensual.

Ejemplo

Francisco inicia un fondo aportando $800.000 trimestrales vencidos en una cuenta que reconoce el 1,6% efectivo trimestral. En el trimestre 16 viaja fuera del país y deja de realizar los depósitos, sin embargo, no retira el dinero sino hasta los dos años siguientes. ¿Cuánto retira?

En este caso, se presenta una combinación de anualidad vencida con pagó único, ya que del trimestre 1 al 16 se presenta la anualidad y, de allí en adelante, el monto alcanzado se convierte en un pagó único al cual debe hallársele el valor futuro.

La representación gráfica de este caso es:



Procedimentalmente se resuelve así:

1. Se calcula el valor futuro de la anualidad en la que:
A= $800.000 trimestrales vencidos

i= 1,6% efectivo trimestral
n = 16 trimestres

Utilizando la fórmula se tiene:

$$VF = 800.000\left[\frac{(1+0{,}016)^{16}-1}{0{,}016}\right]$$

$$VF = 800.000.\left[\frac{(1{,}016)^{16}-1}{0{,}016}\right]$$

$$VF = 800.000\left[\frac{1.289137753-1}{0{,}016}\right]$$

$$VF = 800.000x18.07110957$$

$$VF = 14.456.887{,}66$$

2. Se toman los $14.456.887,66 y se llevan a valor futuro pago único durante 8 trimestres (2 años x 4 trimestres x año), a la tasa del 1,6% efectiva trimestral, así:

$$VF = \$14.456.887{,}66(1{,}016)^{8}$$

$$VF = 14.456.887{,}66x1.135402023$$

$$VF = 16.414.379{,}49$$

Si el cálculo se debe realizar con tasa nominal, la fórmula se convierte en:

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1}{\frac{j}{m}}\right]$$

Dónde:

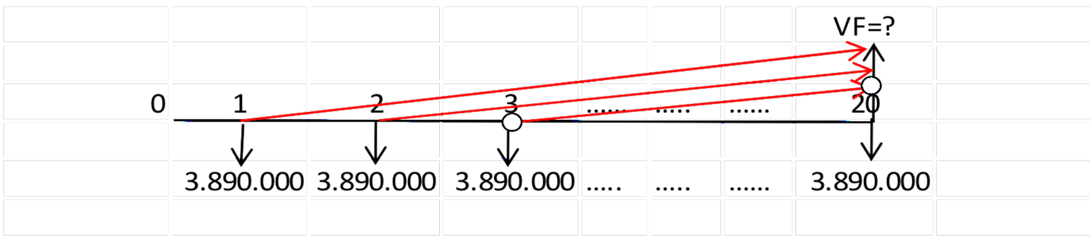
VF= valor futuro
N*m= periodos de depósito
j= tasa nominal
m= periodos de capitalización

Al igual que en el valor futuro equivalente a un valor presente tasa nominal, los problemas pueden ser planteados a tiempo exacto, a tiempo inexacto y en periodos de capitalización.

Ejemplo:

Diego quiere saber qué cantidad podrá acumular en 20 semestres, si deposita al final de cada semestre $3.890.000 en una cuenta que paga el 4,4% con capitalización semestral.

En este problema se desea conocer el valor futuro de una anualidad vencida con tasa nominal por cuanto: a) los depósitos se hacen al final de cada semestre por 20 semestres y b) la tasa de interés es del 4,4% con capitalización semestral, la cual la hace una tasa nominal. Si se grafica el problema, el resultado sería:



Y los datos que suministra son:

A = $3.890.000
N*m = 20 semestres
j = 4,4%, CCS.
m=2

Al utilizar la fórmula respectiva se tiene:

$$A = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

$$A = \frac{28.567.876}{\left[\frac{(1+0{,}07)^{12} - 1}{0{,}07}\right]}$$

$$A = \frac{28.567.876}{\frac{1{,}07^{12} - 1}{0{,}07}}$$

$$A = \frac{28.567.876}{\frac{2.252191589 - 1}{0{,}07}}$$

$$A = \frac{28.567.876}{17.88845127}$$

$$A = 1.597.001{,}08$$

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}}\right]$$

$$VF = 3.890.000\left[\frac{\left(1+\frac{0{,}044}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{0{,}044}{2}}\right]$$

$$VF = 3.890.000\left[\frac{(1+0.022)^{20} - 1}{0{,}022}\right]$$

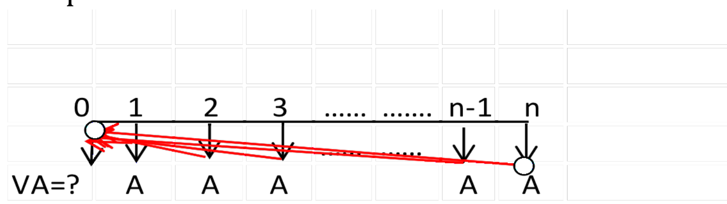
$$VF = 3.890.000\left[\frac{(1{,}022)^{20} - 1}{0{,}022}\right]$$

$$VF = 3.890.000 X 24.78719033$$

$$VF = 96.422.170.39$$

Hallar el valor presente de una serie de pagos vencidos, significa encontrar la suma de los pagos realizados al final de cada periodo, todos descontados al inicio del plazo.

Gráficamente este tipo de operaciones se ve así:



El procedimiento matemático utilizable para hallar el valor presente sería:

$$VA = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + ... + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{-n}$$

Esta expresión, una vez factorizada y simplificada, se convierte en la fórmula que realmente se utiliza, la cual, dependiendo del tipo de tasa de interés (efectiva, nominal) involucrada en la operación, se presenta así:

Tasa efectiva

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Tasa nominal

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]$$

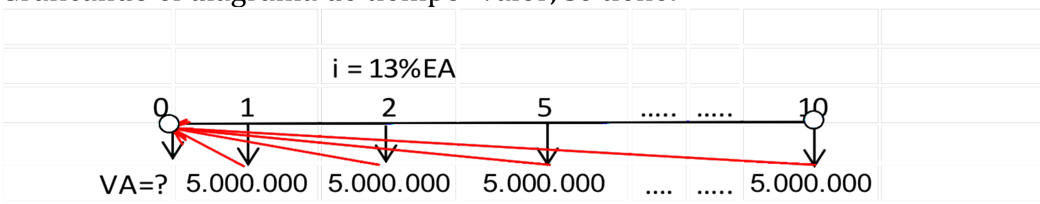
Dónde:

VA= Valor presente
i = tasa efectiva
n = tiempo
n*m = periodos de capitalización totales
j = tasa nominal
m = periodos de capitalización en un año

Ejemplo

Hallar el valor presente de pagos anuales vencidos de $5.000.000 en 10 años y una tasa del 13% efectiva anual**.**

Graficando el diagrama de tiempo- valor, se tiene:



En este caso:

VA = $5.000.000
i = 13% EA
n = 10 años

Como la tasa es efectiva se dice que:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$VA = 5.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}13)^{-10}}{0{,}13}\right]$$

$$VA = 5.000.000\left[\frac{1-(1{,}13)^{-10}}{0{,}13}\right]$$

$$VA = 5.000.000\left[\frac{1-0{,}2945883481}{0{,}13}\right]$$

$$VA = 5.000.000 X 5.426243476$$

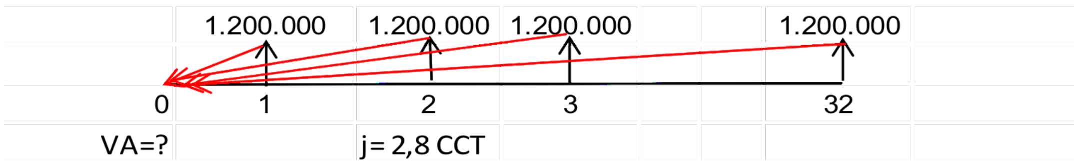
$$VA = 27.131.217{,}38$$

Se concluye entonces, que el valor presente de pagos anuales vencidos de $5.000.000 cada uno durante 10 años, a una tasa del 13% efectiva anual, es de $27.131.216.38.

Ejemplo

A Víctor le proponen colocar hoy una cierta suma de dinero durante 32 trimestres vencidos a una tasa del 2,8%, capitalizable trimestralmente y le entregarán cada trimestre $1.200.000. Para que esto sea posible, ¿qué cantidad debe depositar?

Gráficamente el problema se presenta así:



El problema entrega la siguiente información:

A=$1.200.000
j= 2,8% CCT
m=4

nxm= 32 trimestres

El problema plantea hallar el valor presente a tasa nominal de una serie de ingresos trimestrales vencidos.

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]$$

$$VA = 1.200.000\left[\frac{1-\left(1+\frac{0,028}{4}\right)^{-32}}{\frac{0,028}{4}}\right] VA = 1.200.000\left[\frac{1-(1+0,007)^{-32}}{0,007}\right]$$

$$VA = 1.200.000\left[\frac{1-0.7999391317}{0,007}\right] VA = 1.200.000\left[\frac{0,2000608683}{0,007}\right]$$

$$VA = 1.200.000x28.58012404$$

$$VA = 34.296.148,85$$

La cantidad que debe depositar Víctor para que le entreguen $1.200.000 al final de cada mes, a una tasa del 2,8% con capitalización trimestral es de $34.296.148,85.

Cálculo de la cuota periódica

Más frecuente de lo que se piensa, se debe encontrar el valor de la cuota periódica a partir del valor presente. Cuando esto sucede, debe utilizarse una de estas fórmulas:

A tasa efectiva:

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

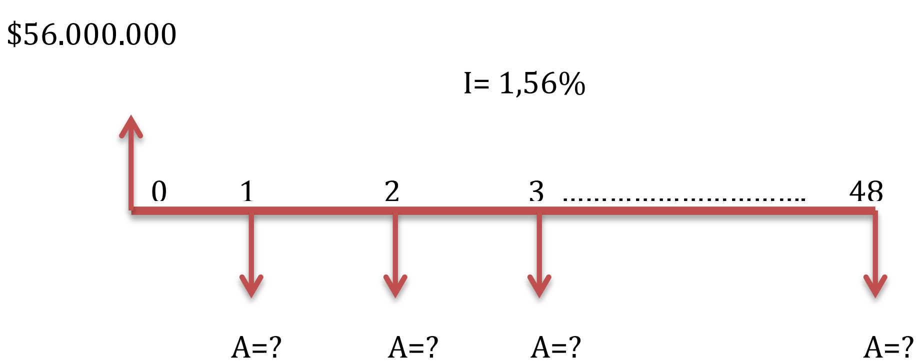
A tasa nominal

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]}$$

Ejemplo

La compañía ABC requiere comprar un equipo especializado que cuesta $56.000.000. Como no tiene ese dinero, busca la financiación de un banco que le ofrece el préstamo en cuotas mensuales vencidas a una tasa del 1,56% efectiva mensual durante 4 años. ¿De cuánto le quedarían las cuotas mensuales?

Gráficamente se representa



VA= $56.000.000
i= 1,56% EM
n= 4 años x12 meses =48 meses

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

$$A = \frac{56.000.000}{\frac{1-(1+0{,}0156)^{-48}}{0{,}0156}} \quad A = \frac{56.000.000}{\frac{1-(1{,}0156)^{-48}}{0{,}0156}}$$

$$A = \frac{56.000.000}{\frac{1-0{,}4756754901}{0{,}0156}} \quad A = \frac{56.000.000}{\frac{0{,}5243245099}{0{,}0156}}$$

$$A = \frac{56.000.000}{33.61054551}$$

$$A = 1.666.143{,}74$$

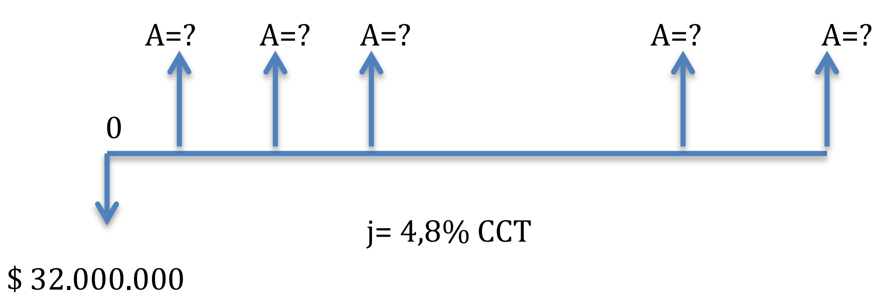
La cantidad que deberá pagar la empresa mensualmente en forma vencida para pagar el crédito de $56.000.000 en 4 años y a una tasa del 1,56% efectiva mensual, es de $1.666.143,74.

Ejemplo

La empresa de lácteos La Vaca Gorda tiene un excedente de tesorería de $32.000.000 y los invierte en un fondo que le paga el 4,8% con capitalización trimestral. ¿Qué cantidad le entregarán trimestralmente como rendimiento en los próximos 3 años?

VA=$32.000.00
j= 4,8%CCT
m=4
n= 3 años

Aquí se debe encontrar el valor de A al final de cada trimestre, con una tasa de interés nominal a partir de valor presente. El diagrama representativo es:



Con la fórmula a interés nominal, el resultado es:

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{i}\right]}$$

$$A = \frac{32.000.000}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{0,048}{4}\right)^{-3x4}}{\frac{0,048}{4}}\right]}$$

$$A = \frac{32.000.000}{\left[\frac{1-(1+0,012)^{-12}}{0,012}\right]} \quad A = \frac{32.000.000}{\left[\frac{1-1,012^{-12}}{0,012}\right]}$$

$$A = \frac{32.000.000}{\frac{1-0,8666302616}{0,012}} \quad A = \frac{32.000.000}{\frac{0,1333697384}{0,012}}$$

$$A = \frac{32.000.000}{11.11414487}$$

$$A = 2.879.213,87$$

La cantidad trimestral que le entregarán como rendimiento por los $32.000.000, a una tasa del 4,8% con capitalización trimestral, es de $2.879.213,87.

Cálculo del tiempo

Si lo que se quiere es hallar el tiempo en años o en periodos de capitalización a partir del valor presente en la serie de pagos vencidos, se utiliza una de estas fórmulas:

A interés efectivo

$$-n = \frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{A}xi\right)\right]}{\log(1+i)}$$

A interés nominal

$$-(nxm) = \frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{A}x\frac{j}{m}\right)\right]}{\log\left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

Dado que el numerador requiere calcular el logaritmo de una sustracción y recordando la ley de los logaritmos para la sustracción, en la cual $\log(a-b)$ se debe efectuar primero la resta de a-b y luego hallar el logaritmo. En este caso a=1 y b=

$$\left(\frac{VA}{A}xi\right) \text{ó} \left(\frac{VA}{A}x\frac{j}{m}\right)$$

Ejemplo

Una empresa de bebidas energéticas requiere realizar una inversión de $100.000.000 para ampliar su producción. El gerente financiero quiere saber durante cuánto tiempo debe pagar cuotas anuales vencidas de $14.000.000 para cancelar el préstamo que le hará el banco, si la tasa que le cobran es del 8% efectiva anual.

Este es el típico caso de cálculo del tiempo a partir de valor presente serie de pagos vencidos, dado que:

VA = $100.000.000
A= $14.000.000
i=8%EA

Tomando la fórmula de tiempo a partir de tasa efectiva con $\log_{10,}$ se tiene:

$$-n=\frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{A}xi\right)\right]}{\log(1+i)}$$

$$-n=\frac{\log\left[1-\left(\frac{100.000.000}{14.000.000}x0{,}08\right)\right]}{\log(1+0{,}08)} -n=\frac{\log[1-(7.142857143x0{,}08)]}{\log(1{,}08)}$$

$$-n=\frac{\log[1-0{,}5714285714]}{\log 1{,}08}=-n=\frac{\log(0{,}4285714286)}{\log 1{,}08}$$

$$-n=\frac{-0.3679767853}{0{,}03342375549} -n=-11{,}00$$

$$n=11{,}00$$

El tiempo requerido para cancelar la deuda de $100.000.000, a una tasa del 8% efectiva anual con cuotas anuales vencidas de $14.000.000 es de 11 años.

El valor positivo de n se obtiene al cancelar el signo (-) a los dos lados de la igualdad, como sucede si es cálculo de tiempo valor presente pago único.

Ejemplo

Patricia invierte hoy $5.000.000 en una cuenta que paga el 7,2% con capitalización, con la esperanza de obtener al final de cada bimestre un ingreso de $1.750.000. ¿Durante cuántos bimestres le entregarán esa suma?

VA=$5.000.000
A= $1.750.000
j=7,2%CCB
m=6

Para hallar el tiempo a tasa nominal se utilizará la fórmula, pero con Ln, pues realmente es indiferente utilizar la una o la otra.

$$-(nxm)=\frac{\ln\left[1-\left(\frac{VA}{A}x\frac{j}{m}\right)\right]}{\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

$$-nxm=\frac{\ln\left[1-\left(\frac{5.000.000}{1.750.000}x\frac{0,072}{6}\right)\right]}{\ln\left(1+\frac{0.072}{6}\right)}\quad -nxm=\frac{\ln[1-(2.857142857x0,012)]}{\ln(1+0,012)}(\ )$$

$$-nxm=\frac{\ln[1-0,03428571429]}{\ln 1,012}\quad -nxm=\frac{\ln(0,9657142857)}{\ln 1,012}$$

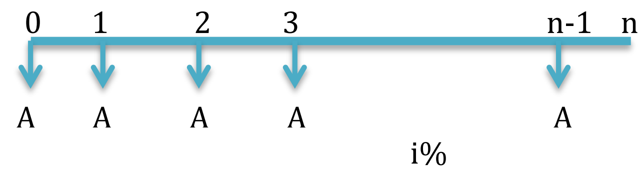
$$-nxm=\frac{-0,034887259}{0,01192857087}\quad -nxm=-2.92$$

El tiempo en el que Patricia podrá recibir $1.750.000 bimestre vencido, a una tasa del 7,2% con capitalización bimestral si invierte $5.000.000, es de 2,92 bimestres.

4.3 Anualidades anticipadas

Cuando las cuotas periódicas se depositan al inicio del periodo (año, mes, trimestre etc.), se dice que la operación es anticipada.

Gráficamente este tipo de cuotas periódicas se representan así:



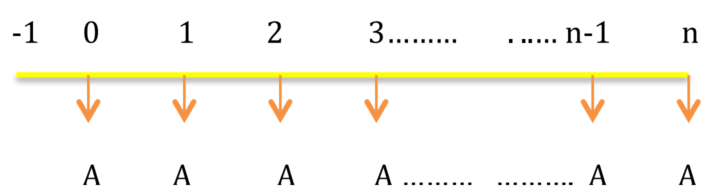
La simbología utilizada en este tipo de pagos periódicos es exactamente igual al de los vencidos. Para efectos de facilitar su recordación, se incluyen a continuación:

VA= Valor presente
VF= Valor futuro
A = cuota periódica
n = tiempo
i= tasa de interés efectiva
j= tasa de interés nominal
m = Períodos de capitalización

Cálculo del valor futuro

Existen varias formas para calcular el valor futuro de una serie de pagos anticipados.

Una de las formas resulta de transformar el diagrama inicial en el siguiente



Al agregar A al momento n, la serie de pagos se convierte en vencida durante n+1 periodos. Al plantear la siguiente ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal n-1, remítase al gráfico. En él se observa que el pago A en el período n-1 puede considerarse como el último pago de una serie de pagos periódicos vencidos que se inician en el período -1. Es decir:

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + A(1+i)^{-1} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}\right] = A\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}\right] = A\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

Siendo esta fórmula la utilizada para calcular el valor futuro de una serie de pagos anticipados.

Dependiendo del tipo de tasa de interés, el cálculo del valor futuro de una serie de pagos periódicos anticipados será:

A tasa efectiva

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

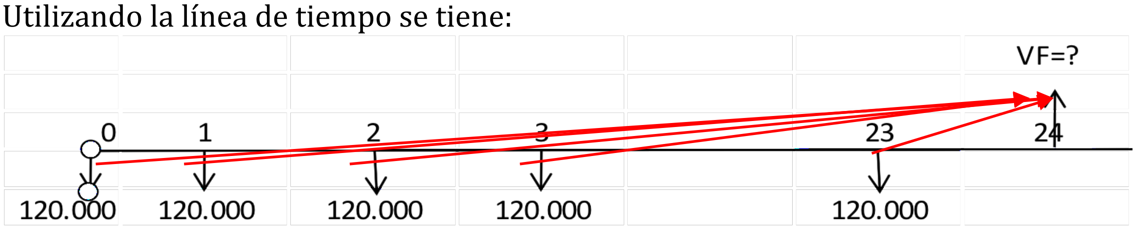
A tasa nominal

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(nxm)+1} - 1}{i} - 1\right]$$

Ejemplo

Rodrigo quiere comprar dentro de 6 años. Para ello comienza un fondo, depositando al inicio de cada trimestre $720.000 a una tasa del 0,9% efectivo trimestral. ¿Qué cantidad podrá acumular?

Utilizando la línea de tiempo se tiene:



En este caso:

A=$720.000
i= 0,9% ET
n= 6 años =6x4=24 trimestres

Reemplazando los valores en la fórmula:

$$VF = 720.000\left[\frac{(1+0{,}009)^{24+1}-1}{0{,}009}-1\right]$$

$$VF = 720.000\left[\frac{(1{,}009)^{25}-1}{0{,}009}-1\right]$$

$$VF = 720.000\left[\frac{1.2510629304-1}{0{,}009}-1\right]$$

$$VF = 720.000\left[\frac{0{,}2510629304}{0{,}009}-1\right]$$

$$VF = \$720.000[27.89588115-1]$$

$$VF = 720.000x26.89588115$$

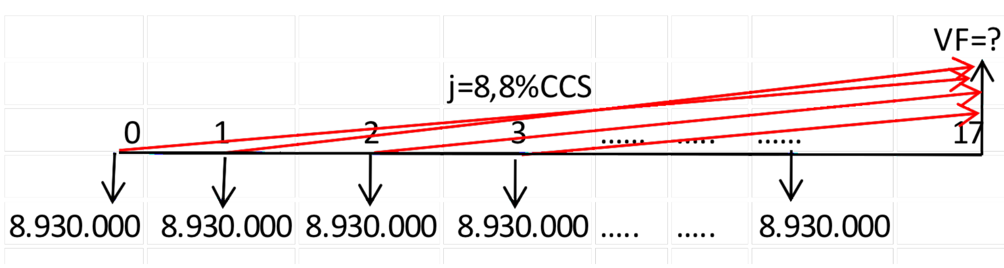
$$VF = \$\$20.085.034{,}43$$

Rodrigo podrá retirar a los 6 años $20.085.034,43, si deposita al inicio de cada trimestre $720.000 a una tasa del 0,9% efectiva trimestral.

Ejemplo

Isabelina quiere saber qué cantidad podrá acumular en 8,5 años, si deposita al inicio de cada semestre $8.930.000 en una cuenta que paga el 8,8% con capitalización semestral.

En este problema se desea conocer el valor futuro de una anualidad anticipada con tasa nominal, por cuanto a) los depósitos se hacen al inicio de cada semestre por 8,5 años y b) la tasa de interés es del 8,8% con capitalización semestral, la cual la hace una tasa nominal. Si se grafica el problema, el resultado sería:



Y los datos que suministra son:

A=$8.930.000
n =8,5 años
j = 8,8%, CCS
m=2

Al utilizar la fórmula respectiva se tiene:

$$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(nxm)+1}-1}{\frac{j}{m}}-1\right]$$

$$VF = 8.930.000\left[\frac{\left(1+\frac{0,088}{2}\right)^{(8,5x2)+1}-1}{\frac{0,088}{2}}-1\right]$$

$$VF = 8.930.000\left[\frac{(1+0.044)^{17+1}-1}{0,044}-1\right]$$

$$VF = 8.930.000\left[\frac{(1,044)^{18}-1}{0,022}-1\right]$$

$$VF = 8.930.000\left[\frac{2.170745833-1}{0,044}-1\right]$$

$$VF = 8.930.000\left[\frac{1.170745833}{0,044}-1\right]$$

$$VF = 8.930.000[26.60785984-1]$$

$$VF = 8.930.000x25.60785984$$

$$VF = \$228.678.188.4$$

Isabelina podrá acumular en 8,5 años $228.678.188,4, si deposita al inicio de cada semestre $8.930.000 en una cuenta que paga el 8,8% CCS.

Cálculo de la cuota periódica

Cuando lo que se desea es calcular la cuota periódica y, dependiendo del tipo de interés con el que se trabaje (efectiva o nominal), se utiliza una de estas fórmulas:

A tasa efectiva:

$$A = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}$$

A tasa nominal:

$$A = \frac{VF}{\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(nxm)+1}-1}{\frac{j}{m}}-1\right]}$$

Dónde:

VF = valor futuro
i = tasa efectiva
n= tiempo
A= cuota periódica
j= tasa nominal
m= períodos de capitalización en un año

Ejemplo

¿Qué cantidad deberá depositarse al inicio de cada año, durante 12 años, para acumular $28.567.876 en una cuenta que paga el 7% efectiva anual?

La incógnita aquí es A, es decir, la cuota periódica. La tasa de interés es efectiva y la anualidad es anticipada por cuanto los depósitos se hacen al inicio del año. El problema entrega los siguientes datos:

VF=$28.567.876
i = 7%EA
n= 12 años

Entonces:

$$A = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}$$

$$A = \frac{28.567.876}{\left[\frac{(1+0{,}07)^{12+1}-1}{0{,}07}-1\right]} \quad A = \frac{28.567.876}{\frac{1{,}07^{13}-1}{0{,}07}-1}$$

$$A = \frac{28.567.876}{\frac{2.409845-1}{0{,}07}-1} \quad A = \frac{28.567.876}{20.14064286-1}$$

$$A = \frac{28.567.876}{19.14064286} \quad A = 1.492.524{,}37$$

La cantidad que debe depositarse al inicio de cada año para acumular, en 12 años $28.567.876, a una tasa del 7% efectiva anual, es de $1.492.524,37

Ejemplo

Catalina debe pagar dentro de 9 años y 8 meses $16.981.346. Si la tasa de interés que le cobran es del 8,4% con capitalización bimestral y las cuotas debe abonarlas al inicio de cada bimestre, ¿qué cantidad deberá pagar trimestralmente?

Nuevamente la variable desconocida es A en una serie de pagos periódicos anticipados, por cuanto la cuota se abona al inicio de cada trimestre y con tasa de interés nominal con capitalización bimestral. Así las cosas se cuenta con:

VF= $16.981.346

n = 9 años 8 meses luego nxm = 58 bimestres (9 años x 6 bimestres x año =54 + (8 meses /2 meses) = 4 bimestres)

j= 8,4%CCB
m= 6 bimestres por año

Tomando la fórmula correspondiente, se obtiene:

$$A=\frac{VF}{\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(nxm)+1}-1}{\frac{j}{m}}-1\right]} \quad A=\frac{16.981.346}{\left[\frac{\left(1+\frac{0,084}{6}\right)^{(54+1)}-1}{\frac{0,084}{6}}-1\right]}$$

$$A=\frac{16.981.346}{\left[\frac{(1+0,014)^{55}-1}{0,014}\right]} \quad A=\frac{16.981.346}{\frac{1,014^{55}-1}{0,014}-1}$$

$$A=\frac{16.981.346}{\frac{2,148263377-1}{0,014}-1} \quad A=\frac{16.981.346}{\frac{1.148263377}{0,014}-1}$$

$$A=\frac{16.981.356}{82.01881267-1} \quad A=\frac{16.981.356}{81.01881267}$$

$$A=209.597,69$$

La cantidad que Catalina debe abonar al inicio de cada bimestre para cancelar la deuda de $16.981.346 en 9 años y 8 meses, a una tasa del 8,4% con capitalización bimestral, es de $209.597,69.

Cálculo del tiempo

Si por el contrario se tiene el valor futuro y la cuota periódica anticipada, y la tasa de interés (nominal y/o efectiva), pero se desconoce el tiempo, debe procederse así:

Si la tasa es efectiva, se usará:

$$(n+1)=\frac{\log\left[\left(\left(\frac{VF}{A}+1\right)xi\right)+1\right]}{\log(1+i)}$$

Si la tasa es nominal:

$$(nxm+1)=\frac{\log\left[\left(\left(\frac{VF}{A}+1\right)x\frac{j}{m}\right)+1\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$

NOTA 1. En vez de trabajar con log_{10}, se puede trabajar con Ln.

NOTA 2. Al resultado final debe restársele el 1 de (n+1) o de (nxm+1), por cuanto este resultó del artificio matemático utilizado para facilitar el manejo de la fórmula.

Dónde:

VF= valor futuro
A= cuota periódica
i= tasa efectiva
n= tiempo
nxm = periodos de capitalización total
j= tasa nominal
m= periodos de capitalización por año

Ejemplo

Una persona inicia un fondo con depósitos anuales anticipados de $900.000, con la esperanza de reunir $15.000.000. Si la tasa que le reconocen es del 5% efectiva anual, ¿durante cuánto tiempo deberá hacer los depósitos?

Al leer el problema es fácil identificar que se debe encontrar el tiempo a partir de valor futuro, anualidad anticipada y tasa efectiva, por cuanto:

VF= $15.000.000
A= $900.000 anuales anticipados
i= 5% EA

n=?

Entonces:

$$n+1=\frac{\ln\left[\left(\left(\frac{VF}{A}+1\right)xi\right)+1\right]}{\ln(1+i)}$$

$$n+1=\frac{\ln\left[\left(\left(\frac{15.000.000}{900.000}+1\right)x0{,}05\right)+1\right]}{\ln(1+0{,}05)}$$

$$n+1=\frac{\ln[((16{,}6666667+1)x0{,}05)+1]}{\ln(1{,}05)}$$

$$n+1=\frac{\ln((17{,}666667x0{,}05)+1)}{\ln 1{,}05}$$

$$n+1=\frac{\ln(0{,}88333333333+1)}{\log 1{,}05}\,n+1=\frac{\ln 1{,}8833333333}{\ln 1{,}05}$$

$$n+1=\frac{0{,}6330432565}{0{,}04879016417}\,n+1=12{,}97$$

$$n=12{,}97-1$$

$$n=11{,}97$$

El resultado indica que para que la persona pueda reunir 15.000.000, a partir de depósitos anuales anticipados de $900.000, a una tasa del 5% efectiva anual, se requieren 11,97 años.

Ejemplo

¿Durante cuántos meses deben realizarse pagos mensuales anticipados de $279.000 para cancelar una deuda de $4.000.000, a una tasa del 6% con capitalización mensual?

VF= $4.000.000
j= 6% CCM
m= 12
A= $279.000 mensuales anticipados.

Utilizando la fórmula correspondiente con Logaritmo base 10, el resultado es:

$$nxm + 1 = \frac{\log\left[\left(\left(\frac{VF}{A} + 1\right)x\frac{j}{m}\right) + 1\right]}{\log\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$$

$$nxm + 1 = \frac{\log\left[\left(\left(\frac{4.000.000}{279.000} + 1\right)x\frac{0,06}{12}\right) + 1\right]}{\log\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)}$$

$$nxm + 1 = \frac{\log[((14.33691756 + 1)x0,005) + 1]}{\log(1 + 0,005)}$$

$$nxm + 1 = \frac{\log((15,33691657x0,005) + 1)}{\log(1,005)}$$

$$nxm + 1 = \frac{\log(0,07668458781 + 1)}{\log(1,005)} \quad nxm + 1 = \frac{\log 1,076684588}{\log 1,005}$$

$$nxm + 1 = \frac{0,0320884964}{0,002166061757} \quad nxm + 1 = 14,81$$

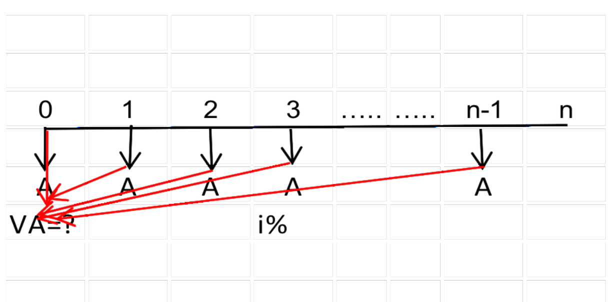
$$nxm = 14,81 - 1$$

$$nxm = 13,81$$

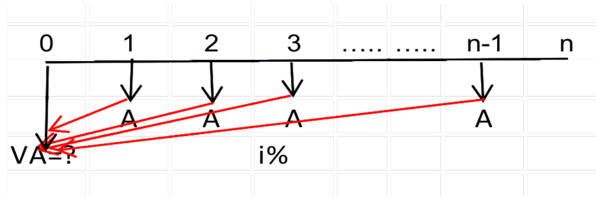
Para cancelar una deuda de \$4.000.000 con cuotas mensuales anticipadas de \$279.000, se requieren 13,81 meses.

Valor presente serie de pagos anticipados

Para entender cómo hallar el valor presente de una serie de pagos anticipados, es preciso diagramar la situación inicial:



Y transformarla en:



Es decir, eliminar A del inicio. Así queda como una serie de pagos periódicos vencidos a n-1 periodos. Al sumar A con la ecuación del valor presente de la serie de pagos vencidos se tiene:

$$VA = A + A\left[\frac{\left((1+i)^{n-1}\right)-1}{i}(1+i)^{-(n-1)}\right]$$

$$VA = A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}(1+i)^{-(n-1)}+1\right]$$

Significa encontrar la suma de los pagos realizados al final de cada periodo, todos descontados al inicio del plazo.

El procedimiento matemático utilizado para hallar el valor presente sería:

$$VA = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \ldots + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{-n}$$

Esta expresión, una vez factorizada y simplificada, se convierte en la fórmula que realmente se utiliza, la cual, dependiendo del tipo de interés (efectiva, nominal) involucrada en la operación, se presenta así:

Tasa efectiva

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Tasa nominal

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]$$

Dónde:

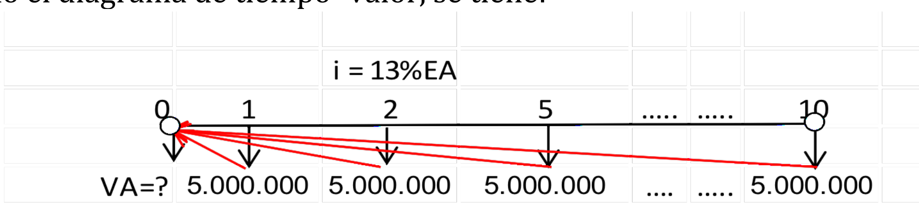
VA= Valor presente
i = tasa efectiva
n = tiempo
nxm = periodos de capitalización totales

j = tasa nominal
m = periodos de capitalización en un año

Ejemplo

Hallar el valor presente de pagos anuales vencidos de $5.000.000 en 10 años y una tasa del 13% efectiva anual**.**

Graficando el diagrama de tiempo- valor, se tiene:



En este caso:

VA = $5.000.000
i = 13% EA
n = 10 años

Como la tasa es efectiva, se dice que:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$VA = 5.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}13)^{-10}}{0{,}13}\right]$$

$$VA = 5.000.000\left[\frac{1-(1{,}13)^{-10}}{0{,}13}\right]$$

$$VA = 5.000.000\left[\frac{1-0{,}2945883481}{0{,}13}\right]$$

$$VA = 5.000.000X5.426243476$$

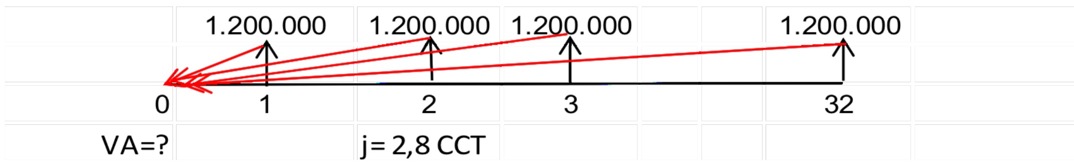
$$VA = 27.131.217{,}38$$

Se concluye que el valor presente de pagos anuales vencidos de $5.000.000, cada uno durante 10 años, a una tasa del 13% efectiva anual, es de $27.131.216.38.

Ejemplo

A Víctor le proponen colocar hoy una cierta suma de dinero durante 32 trimestres vencidos a una tasa del 2,8%, capitalizable trimestralmente y le entregarán cada trimestre $1.200.000. Para que esto sea posible, ¿qué cantidad debe depositar?

Gráficamente el problema se presenta así:



El problema entrega la siguiente información:

A=$1.200.000
j= 2,8% CCT
m=4
nxm= 32 trimestres

El problema plantea hallar el valor presente a tasa nominal de una serie de ingresos trimestrales vencidos.

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]$$

$$VA = 1.200.000\left[\frac{1-\left(1+\frac{0,028}{4}\right)^{-32}}{\frac{0,028}{4}}\right] VA = 1.200.000\left[\frac{1-(1+0,007)^{-32}}{0,007}\right]$$

$$VA = 1.200.000\left[\frac{1-0.7999391317}{0,007}\right] VA = 1.200.000\left[\frac{0,2000608683}{0,007}\right]$$

$$VA = 1.200.000x28.58012404$$

$$VA = 34.296.148,85$$

La cantidad que debe depositar Víctor para que le entreguen $1.200.000 al final de cada mes, a una tasa del 2,8% con capitalización trimestral, es de $34.296.148,85.

Cálculo de la cuota periódica

Más frecuente de lo que se piensa, se debe encontrar el valor de la cuota periódica a partir del valor presente. Cuando esto sucede, debe utilizarse una de estas fórmulas:

A tasa efectiva

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

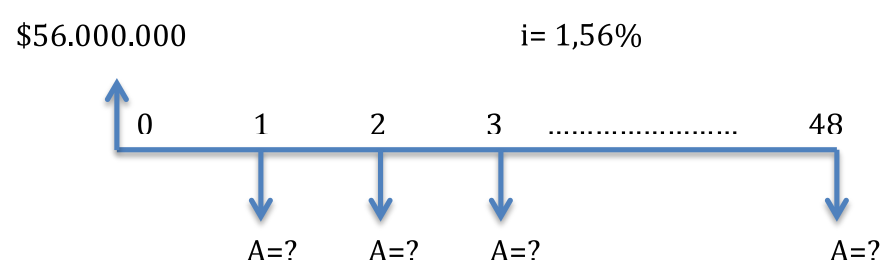
A tasa nominal

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{i}\right]}$$

Ejemplo

La compañía ABC requiere comprar un equipo especializado que cuesta \$56.000.000. Como no tiene ese dinero, busca la financiación de un banco que le ofrece el préstamo en cuotas mensuales vencidas a una tasa del 1,56% efectiva mensual, durante 4 años. ¿De cuánto le quedarían las cuotas mensuales?

Gráficamente se represента así:



VA= \$56.000.000
i= 1,56% EM
n= 4 años x12 meses =48 meses

$$A=\frac{VA}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

$$A=\frac{56.000.000}{\frac{1-(1+0{,}0156)^{-48}}{0{,}0156}} \quad A=\frac{56.000.000}{\frac{1-(1{,}0156)^{-48}}{0{,}0156}}$$

$$A=\frac{56.000.000}{\frac{1-0{,}4756754901}{0{,}0156}} \quad A=\frac{56.000.000}{\frac{0{,}5243245099}{0{,}0156}}$$

$$A=\frac{56.000.000}{33.61054551}$$

$$A=1.666.143{,}74$$

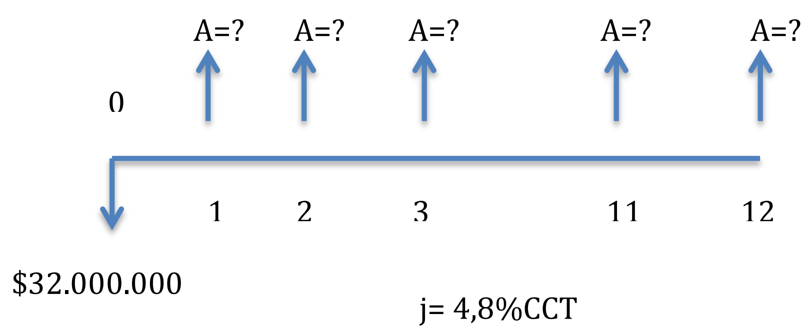
La cantidad que deberá pagar la empresa mensualmente en forma vencida para pagar el crédito de $56.000.000, en 4 años a una tasa del 1,56% efectiva mensual, es $1.666.143,74.

Ejemplo

La empresa de lácteos La Vaca Gorda tiene un excedente de tesorería de $32.000.000 y los invierte en un fondo que le paga el 4,8% con capitalización trimestral. ¿Qué cantidad le entregarán trimestralmente como rendimiento en los próximos 3 años?

VA=$32.000.00
j= 4,8%CCT
m=4
n= 3 años

Aquí se debe encontrar el valor de A al final de cada trimestre, con una tasa de interés nominal a partir de valor presente. El diagrama representativo es:



Con la fórmula a interés nominal el resultado es:

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{i}\right]}$$

$$A = \frac{32.000.000}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{0{,}048}{4}\right)^{-3x4}}{\frac{0{,}048}{4}}\right]}$$

$$A = \frac{32.000.000}{\left[\frac{1-(1+0{,}012)^{-12}}{0{,}012}\right]} \quad A = \frac{32.000.000}{\left[\frac{1-1{,}012^{-12}}{0{,}012}\right]}$$

$$A = \frac{32.000.000}{\frac{1-0{,}8666302616}{0{,}012}} \quad A = \frac{32.000.000}{\frac{0{,}1333697384}{0{,}012}}$$

$$A = \frac{32.000.000}{11.11414487}$$

$$A = 2.879.213{,}87$$

La cantidad trimestral que le entregarán como rendimiento por los \$32.000.000, a una tasa del 4,8% con capitalización trimestral, es \$2.879.213,87.

Cálculo del tiempo

Si lo que se quiere es hallar el tiempo en años o en periodos de capitalización, a partir de valor presente en la serie de pagos vencidos, se utiliza una de estas fórmulas:

A interés efectivo

$$-n = \frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{A}xi\right)\right]}{\log(1+i)}$$

A interés nominal

$$-(nxm) = \frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{A}x\frac{j}{m}\right)\right]}{\log\left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

Dado que el numerador requiere calcular el logaritmo de una sustracción, y recordando la ley de los logaritmos para la sustracción en la cual $\log(a-b)$ se debe efectuar primero la resta de a-b y luego hallar el logaritmo, en este caso a=1 y b= $\left(\frac{VA}{A}xi\right)$ ó $\left(\frac{VA}{A}x\frac{j}{m}\right)$

Ejemplo

Una empresa de bebidas energéticas requiere realizar una inversión de $100.000.000 para ampliar su producción. El gerente financiero quiere saber durante cuánto tiempo debe pagar cuotas anuales vencidas de $14.000.000 para cancelar el préstamo que le hará el banco, si la tasa que le cobran es del 8% efectiva anual.

Este es el típico caso de cálculo de tiempo a partir de valor presente serie de pagos vencidos dado que:

VA = $100.000.000
A= $14.000.000
i=8%EA

Tomando la fórmula de tiempo a partir de tasa efectiva con $\log_{10}$ se tiene:

$$-n = \frac{\log\left[1-\left(\frac{VA}{A}xi\right)\right]}{\log(1+i)}$$

$$-n = \frac{\log\left[1-\left(\frac{100.000.000}{14.000.000}x0,08\right)\right]}{\log(1+0,08)} \quad -n = \frac{\log[1-(7.142857143x0,08)]}{\log(1,08)}$$

$$-n = \frac{\log[1-0,5714285714]}{\log 1,08} = -n = \frac{\log(0,4285714286)}{\log 1,08}$$

$$-n = \frac{-0.3679767853}{0,03342375549} \quad -n = -11,00$$

$$n = 11,00$$

El tiempo requerido para cancelar la deuda de $100.000.000, a una tasa del 8% efectiva anual con cuotas anuales vencidas de $14.000.000 es de 11 años.

El valor positivo de n se obtiene al cancelar el signo (-) a los dos lados de la igualdad como sucede si es cálculo de tiempo valor presente pago único.

Ejemplo

Patricia invierte hoy $5.000.000 en una cuenta que paga el 7,2% con capitalización, con la esperanza de obtener al final de cada bimestre un ingreso de $1.750.000, ¿durante cuántos bimestres le entregarán esa suma?

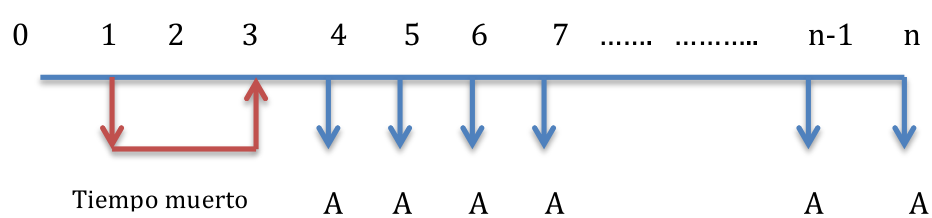
VA=$5.000.000
A= $1.750.000
j=7,2%CCB
m=6

Para hallar el tiempo a tasa nominal se utilizará la fórmula pero con Ln, pues realmente es indiferente utilizar la una o la otra.

4.4 Anualidades diferidas

Una serie de pagos diferidos se caracteriza porque existe un periodo de tiempo en el cual no hay pago, ni de intereses ni de cuota periódica. A dicho periodo de tiempo se le denomina tiempo muerto o de gracia.

Gráficamente este tipo de series se representa así:



En este tipo de anualidad, se trabaja normalmente con el pago A al final del periodo, es decir, como una anualidad vencida. Por tanto, si se desea encontrar el valor futuro, sólo se requiere aplicar la fórmula adecuada del valor futuro de serie de pagos vencidos.

Por el contrario, el cálculo del valor presente requiere la utilización de una de estas fórmulas, según la tasa de interés:

A tasa efectiva:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}$$

A tasa nominal

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-kxm}$$

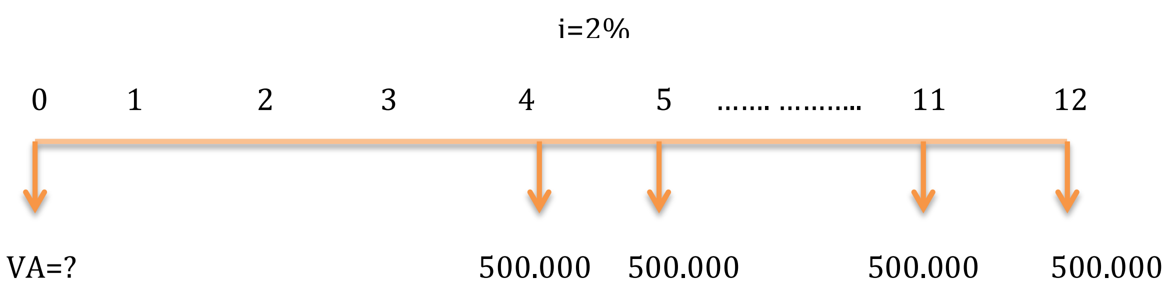
Dónde:

VA= Valor presente
A= cuota periódica
i= tasa efectiva
n= tiempo de pago
nxm = tiempo de pago en periodos de capitalización totales
m= períodos de capitalización por año
k= tiempo muerto o de gracia en años
kxm= periodos de gracia o muertos en periodos de capitalización

Ejemplo

Calcular el valor presente de una serie de pagos de $500.000 semestrales, si el primer pago debe recibirse dentro de 2 años y el último dentro de 6 años, siendo la tasa de interés del 2% efectivo semestral.

Dibujando el diagrama correspondiente a las condiciones del problema, se tiene:



El tiempo diferido es de 3 semestres y el de pago de 9 semestres (12-3).

A= $500.000
i=2%ES
n= 9 semestres
k= 3 semestres

Como la tasa es efectiva semestral, el valor presente es:

$$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}$$

$$VA = 500.000\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-9}}{0{,}02}\right](1+0{,}02)^{-3}$$

$$VA = 500.000\left[\frac{1-(1{,}02)^{-9}}{0{,}02}\right](1{,}02)^{-3} \; VA = 500.000\left[\frac{1-0{,}8367552659}{0{,}02}\right]X\,0{,}9423223345$$

$$VA = 500.000\left[\frac{0{,}1632447341}{0{,}02}\right]X\,0{,}9423223345$$

$$VA = 500.000\,X\,8.162236706\,X\,0{,}9423223345$$

$$VA = 3.845.728{,}97$$

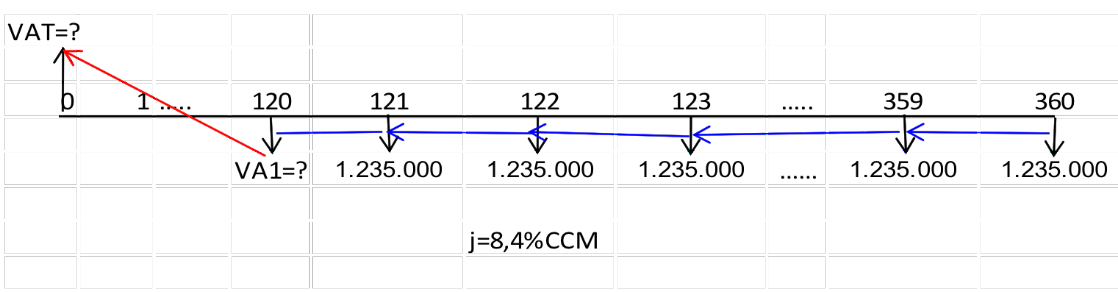
El valor presente equivalente a una serie de pagos de $500.000 semestrales, que se inician dentro de 2 años y terminan dentro de 6 años, a una tasa del 2% efectiva semestral, es de $3.845.728,97.

En resumen, el valor presente de una serie de pagos diferidos se encuentra hallando el valor presente de una anualidad vencida durante los periodos de pago y este valor se lleva a valor presente de un pago único durante los periodos diferidos.

Ejemplo

Un agricultor requiere de un préstamo para sembrar árboles cuyo período de producción es de 10 años. Un banco le hace un préstamo con las siguientes condiciones: a) cuotas mensuales de $1.235.000 pagaderas a partir del primer mes del primer año en que los árboles comiencen a producir; b) tasa de interés del 8,4% con capitalización mensual y c) 20 años de pago. ¿De cuánto fue el préstamo?

El diagrama de tiempo de este problema es:



A= $1235.000
j=8,4%CCM
m= 12
k= 10 años
n= 20 años

Dado que la tasa es nominal, la solución es:

$$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-kxm}$$

$$VA = 1.235.000\left[\frac{1-\left(1+\frac{0,084}{12}\right)^{-20X12}}{\frac{0,084}{12}}\right]\left(1+\frac{0,084}{12}\right)^{-10X12}$$

$$VA = 1.235.000\left[\frac{1-(1,007)^{-240}}{0,007}\right](1,007)^{-120}$$

$$VA = 1.235.000X116.0760049X0,4329757105$$

$$VA = 62.068.742.01$$

En este tipo de series, es más necesario que en cualquiera de las otras, la elaboración del diagrama de tiempo, ya que es de gran ayuda para identificar claramente los tiempos (diferido y de pago).

Cálculo de la cuota periódica

Si lo que se requiere calcular es la cuota periódica, se utiliza una de estas fórmulas:

A tasa efectiva

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}}$$

A tasa nominal

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-kxm}}$$

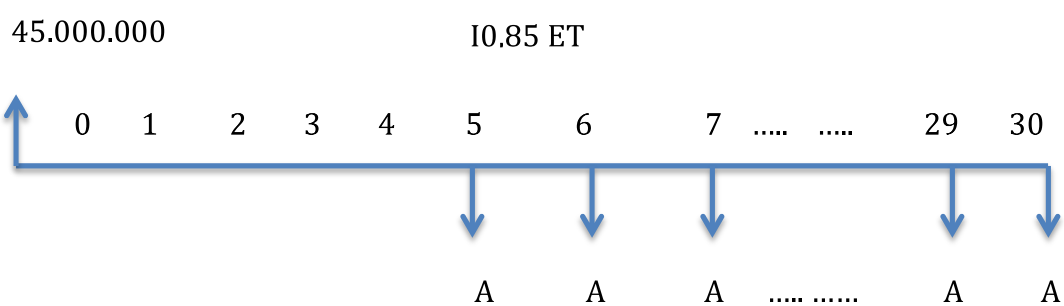
Dónde:

VA= valor presente
i= tasa efectiva
n= tiempo de pago
nxm = periodos de capitalización totales de pago
j= tasa nominal
m= periodos de capitalización en un año
k= periodos de gracia en años
kxm= periodos de capitalización de gracia

Ejemplo

Hallar la cuota trimestral que pagó una deuda de $45.000.000, a una tasa del 0,85% efectiva trimestral, si el primer pago se hizo a los 5 trimestres y los pagos duraron 25 trimestres.

El diagrama de este problema es:



Dónde:

VA = Valor presente
i = 0,85%ET
n=25 trimestres
k=5 trimestres

$$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}}$$

$$A = \frac{45.000.000}{\left[\frac{1-(1+0{,}0085)^{-25}}{0{,}0085}\right](1+0{,}0085)^{-5}}$$

$$A = \frac{45.000.000}{\left[\frac{1-(1{,}0085)^{-25}}{0{,}0085}\right](1{,}0085)^{-5}}$$

$$A = \frac{45.000.000}{22.43685156x0{,}9585626155}$$

$$A = \frac{45.000.000}{21.50712712}$$

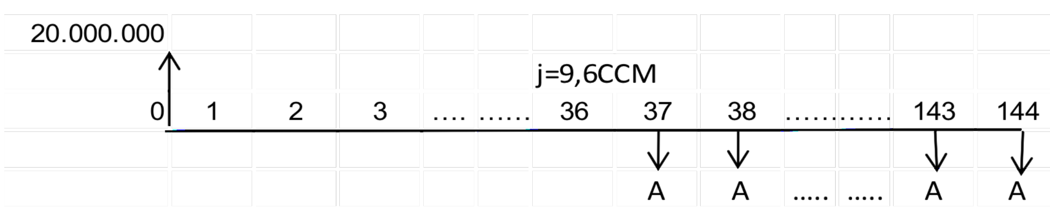
$$A = 2.092.329.66$$

La cuota trimestral que pagó una deuda de $45.000.000, a una tasa del 0,85% efectiva trimestral, cuyo primer pago se hizo en el trimestre 5 y se pagaron durante 25 trimestres, fue de $2.092.329,66

Ejemplo

Beatriz obtuvo del ICETEX un préstamo de $20.000.000 para estudiar un posgrado. La institución le concedió 36 meses de gracia y 9 años de pago y la tasa de interés que le cobra es de 9,6% con capitalización mensual. ¿De cuánto le quedaron las cuotas?

El gráfico de este problema es:



Dónde:

VA = Valor presente
j = 9,6%CCM
n=9 años

kxm= 36 meses

$$A=\frac{VA}{\left[\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\dfrac{j}{m}}\right]\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-kxm}}$$

$$A=\frac{20.000.000}{\left[\dfrac{1-\left(1+\dfrac{0,096}{12}\right)^{-9x12}}{\dfrac{0,096}{12}}\right]\left(1+\dfrac{0,096}{12}\right)^{-36}}$$

$$A=\frac{20.000.000}{\left[\dfrac{1-(1+0,008)^{-108}}{0,008}\right](1+0,008)^{-36}}$$

$$A=\frac{20.000.000}{\left[\dfrac{1-1,008^{-108}}{0,008}\right](1,008)^{-36}}\qquad A=\frac{20.000.000}{72.13447552x0,75062123\,1}$$

$$A=\frac{20.000.000}{54.14566881}$$

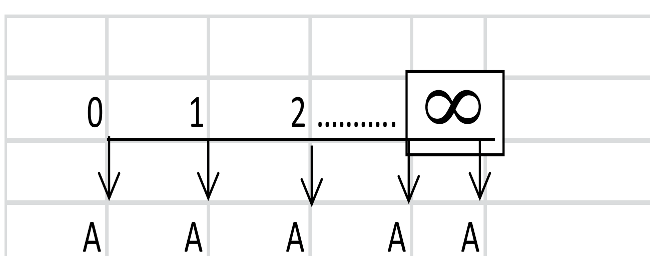
$$A=369.373,96$$

La cuota que Beatriz debe pagar durante 9 años, a una tasa del 9,6% con capitalización mensual luego de 36 meses de gracia, es de \$369.373,96.

4.5 Anualidades perpetuas

Las anualidades perpetuas son aquellas que se sabe dónde comienzan, pero no dónde terminan.

Gráficamente se representan así:



En este tipo de anualidad no puede hallarse el valor futuro, precisamente porque no se sabe cuándo terminará, lo que sí puede hallarse es el valor presente que es igual a:

$$VA = \frac{A}{i}$$

Dónde:

A= valor de la anualidad
i= tasa de interés

Un ejemplo de este tipo de anualidades es la pensión de jubilación, desde el momento en que la persona comienza a gozarla. Otro ejemplo son las herencias a perpetuidad.

Ejemplo

Una persona muy generosa dejó una gruesa suma de dinero para que a perpetuidad se le entregaran $2.000.000 mensuales a un hospital. Si la tasa de interés pactada es del 0.89% efectiva mensual, ¿qué cantidad dejó la persona?

En este caso:

A= $2.000.000,
I= 0,89% efectiva mensual

Luego el valor presente es:

$$VA = \frac{A}{i}$$

$$VA = \frac{2.000.000}{0,0089} = 224.719.101.$$

La persona dejó $224.719.101.

Resumen

Las operaciones financieras a interés compuesto, pueden desarrollarse de las siguientes formas:

TIPO DE PAGO		TASA	OPERACIÓN PRINCIPAL	OPERACIÓN SECUNDARIA
Uniforme	Vencida	Efectiva	Valor futuro Valor presente	Cálculo del tiempo Cálculo de la cuota periódica
		Nominal	Valor futuro Valor presente	
	Anticipada	Efectiva	Valor futuro Valor presente	
		Nominal	Valor futuro Valor presente	
	Diferida	Efectiva	Valor presente	
		Nominal		
	Perpetua	Efectiva	Valor presente	

FÓRMULAS

	Concepto	Tasa Efectiva	Tasa Nominal
ANUALIDAD VENCIDA	Valor futuro	$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	$VF = A\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}}\right]$
	Cuota a partir de valor futuro	$A = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$	$A = \frac{VF}{\left[\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} - 1}{\frac{j}{m}}\right]}$
	Tiempo a partir de valor futuro	$n = \frac{\log\left[\left(\frac{VF}{A} xi\right) + 1\right]}{\log(1+i)}$	$nxm = \frac{\log\left[\left(\frac{VF}{A} x \frac{j}{m}\right) + 1\right]}{\log\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$

	Valor presente	$VA = A\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$	$VA = A\left[\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\dfrac{j}{m}}\right]$
	Cuota a partir de valor presente	$A = \dfrac{VA}{\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$	$A = \dfrac{VA}{\left[\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\dfrac{j}{m}}\right]}$
	Tiempo a partir de valor presente	$-n = \dfrac{\log\left[1-\left(\dfrac{VA}{A}xi\right)\right]}{\log(1+i)}$	$-(nxm) = \dfrac{\log\left[1-\left(\dfrac{VA}{A}x\dfrac{j}{m}\right)\right]}{\log\left(1+\dfrac{i}{m}\right)}$

	Concepto	Tasa Efectiva	Tasa Nominal
ANUALIDAD ANTICIPADA	Valor futuro	$VF = A\left[\dfrac{(1+i)^{n+1}-1}{i}\right]-1$	$VF = A\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{(nxm+1)}-1}{\dfrac{j}{m}}+1\right]$
	Tiempo a partir de valor futuro	$n = \dfrac{\log\left[\left(\left(\frac{VF}{A}+1\right)xi\right)+1\right]}{\log(1+i)}$	$nxm = \dfrac{\log\left[\left(\left(\frac{VF}{A}+1\right)x\frac{j}{m}\right)+1\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$
	Valor presente	$VA = A\left[\dfrac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}+1\right]$	$VA = A\left[\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-(nxm-1)}}{\dfrac{j}{m}}\right]+1$
	Cuota a partir de valor presente	$A = \dfrac{VA}{\left[\dfrac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]+1}$	$A = \dfrac{VA}{\left[\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-(nxm-1)}}{\dfrac{j}{m}}\right]}$
	Tiempo a partir de valor presente	$-n = \dfrac{\log\left[1-\left(\left(\dfrac{VA}{A}-1\right)xi\right)\right]}{\log(1+i)}$	$-(nxm) = \dfrac{\log\left[1-\left(\left(\dfrac{VA}{A}-1\right)x\dfrac{j}{m}\right)\right]}{\log\left(1+\dfrac{i}{m}\right)}$

	Concepto	Efectiva	Nominal
ANUALIDAD DIFERIDA	Valor presente	$VA = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}$	$VA = A\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-kxm}$
	Cuota	$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}}$	$A = \frac{VA}{\left[\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}}{\frac{j}{m}}\right]\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-kxm}}$

Bibliografía

- Aliaga, C. y Aliaga C,C. Matemáticas Financieras, un enfoque práctico. Editorial PRENTICE

- Arboleda, B. (1982). Ingeniería Económica, métodos para el análisis de alternativas de inversión. 2ª edición. Capítulo 3, Asidua. Medellín.

- Baca, Guillermo. (2005). Ingeniería Económica. Editorial Planeta, octava edición, Capítulo 4. Bogotá.

- Blank L. y Tarquin A. (1991). Ingeniería Económica. McGraw-Hill. 3ª edición. Capítulo 3. Bogotá.

- DeGarmo, P. (1998). Ingeniería Económica. 10ª edición. Capítulo 6. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México

- Díaz, A, Aguilera, V. Matemáticas financieras. Editorial Mc Graw Hill, Tercera edición.

- García, A. Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita. Editorial Pearson.

- Gómez, A. Matemáticas Financieras. Editorial Universidad del Quindío.

- Portus, L. (2003). Matemáticas financieras, Ed. Mac Graw Hill.