UNIDAD 2. INTERÉS SIMPLE Y DESCUENTO

Interés simple y descuento

Tabla de contenido

Introducción

Las operaciones financieras se realizan utilizando dos tipos de tasa de interés: simples y compuestas. En esta unidad se trabajará la forma de resolver problemas, en los cuales la tasa de interés es simple. Además, se revisará cómo plantear ecuaciones equivalentes y trabajar con el descuento, tanto simple como racional y bancario.

Objetivos

Objetivo general

Resolver e interpretar problemas que involucren el interés simple y el descuento.

Objetivos específicos

- Comprender qué es el interés simple.
- Deducir y aplicar las fórmulas propias del interés simple.
- Resolver problemas de valor presente, valor futuro, tiempo y tasas de interés a interés simple.
- Plantear ecuaciones equivalentes.
- Resolver problemas de descuento simple, racional o bancario.

2.1 Tipos de interés

El uso del dinero no es gratuito. Quien deposita una cantidad de dinero en una cuenta de ahorros, o quien le presta dinero a otra persona, está sacrificando el uso de ese dinero en otra actividad, como por ejemplo, comprar un bien o pagar un servicio. Para desprenderse de esa suma, él espera una retribución o ganancia, comúnmente llamada interés.

Este concepto puede cuantificarse y medirse en unidades monetarias, como se verá más adelante.

El concepto de interés constituye la base fundamental de toda operación financiera particular en la que intervengan valores y tiempos.

Los intereses suelen ser calculados como una porción de la cantidad inicial, la cual se expresa en términos porcentuales. Es así como el banco promete a sus ahorradores pagar el Y% sobre las sumas que le depositen o cobrar el X% por el dinero que presta.

Las operaciones financieras pueden hacerse bajo tres modalidades, a saber:

Interés simple: Cuando en la operación financiera el interés que se gana o paga se calcula sobre el capital, se dice que ésta se ha hecho a interés simple.
Interés compuesto: Cuando en la operación financiera el interés que se gana o paga se calcula sobre el capital más los intereses, se dice que ésta se ha hecho a interés compuesto.
Interés continuo: Se dice que una negociación es a interés continuo cuando el período de pago es muy corto (días, horas).

En esta unidad el trabajo se centrará en los dos primeros tipos de interés.

2.2 Interés simple

Cuando en la operación financiera los intereses se pagan únicamente sobre el capital inicial, se dice que es una operación a interés simple.

Simbología:
Para trabajar con interés simple se utilizarán los siguientes símbolos:

I: Cantidad de intereses a pagar o a recibir
P: Valor inicial
F: Valor final
i: Tasa de interés
n: Tiempo

Prerrequisitos para trabajar a interés simple

Para realizar operaciones financieras a interés simple, es requisito indispensable que el tiempo (n) y la tasa de interés (i), se encuentren en la misma unidad de tiempo, (años, meses, días, etc).

Por eso, se hará un recuento de cómo convertir bien la tasa de interés o bien el tiempo de años a meses o de meses a años.

Conversión del tiempo

De años a meses

Si en un problema a resolver a interés simple, el tiempo se da en años y se desea convertir a meses, debe realizarse una de estas conversiones:

a. Años exactos: Si el número de años es exacto, se debe multiplicar el número de años por 12.
   Ejemplo: Convertir 2 años a meses = 2x12 = 24 meses.

b. Años inexactos: Si el tiempo aparece en forma de años inexactos, es decir, en forma de entero y decimal, también se multiplica éste por 12.
   Ejemplo: Convertir 1,4 años a meses 1,4x12= 16,8 meses

c. Años y meses: Si el tiempo aparece en años y meses, la conversión se hace así: Número de años por 12, más los meses adicionales.
   Ejemplo: Convertir 1 año y 7 meses a meses. En este caso se dice 1x12 = 12 + 7 = 19 meses.

De meses a años

Si en el problema a resolver a interés simple, el tiempo viene en meses y se desea convertir a años, la operación a hacer es dividir los meses entre 12. Ejemplo: Convertir 17 meses a años: 17/12 = 1,41666666. En este caso, debe trabajarse con todos los decimales para que la operación a realizar sea lo más exacta posible.

Conversión de la tasa de interés

Lo primero que se debe recordar cuando se trabaja una tasa de interés, es que ésta debe convertirse de porcentaje a decimal, es decir, dividirla entre 100.

De tasa anual a tasa mensual

Una vez convertida la tasa de interés a decimal, se procede a dividirla entre 12.
Ejemplo: Convertir el 12% anual en mensual.
Primero se convierte el porcentaje a decimal 12/100 = 0.12
Ahora, se divide entre 12, es decir,
0,12/12=0,01 mensual o 1% mensual.

De tasa mensual a tasa anual

Para convertir la tasa de interés de mensual a anual, ésta debe ser multiplicada por 12.

Ejemplo: Convertir el 0,85% mensual a tasa anual.
0,85/100 = 0,0085x 12=0.102 anual. = 10,2%

Teniendo claro estas conversiones, se procede a calcular cada uno de los elementos propios del interés simple, a saber:

Cantidad de intereses a pagar o a recibir

Si se desea saber qué cantidad de intereses se pagan o reciben en una negociación con este tipo de interés, se utiliza la siguiente fórmula:

$$I = Pxixn \qquad (1)$$

Dónde:

P: Valor inicial n: tiempo i: tasa de interés simple

Ejemplo:

Una persona invierte hoy $1.000.000 en una cuenta que paga el 1% simple mensual durante 8 meses, ¿cuánto recibirá de intereses?

P=$1.000.000 n= 8 meses i= 1% mensual

Remplazando los valores en la ecuación (1), se tiene:
I=1.000.000x8x0, 01
I=80.000

La persona recibirá en los 8 meses $80.000 de intereses.

Ejemplo:

Teresa le pide prestado $800.000 a Carlos durante 9 meses. Él le cobra el 6% simple anual, ¿qué cantidad de intereses le pagará Teresa a Carlos?

P=$900.000 n= 9meses i=6% anual

Lo primero que se observa es que el tiempo está en meses (9) y la tasa en años (6%), por tanto, es necesario que estén en la misma unidad de medida para poder resolver el problema. En este caso, se va a convertir la tasa de interés de anual a mensual, así:

0,06/12= 0,005 y se aplica la fórmula (1)

$$I = 900.000x0{,}005x9 = 40.500$$

Teresa debe pagar a Carlos $40.500 de intereses en los 9 meses.

Valor final

Para hallar el valor futuro a interés simple, se utiliza la siguiente fórmula:

$$F = Px(1 + (nxi)) \qquad (2)$$

Dónde:

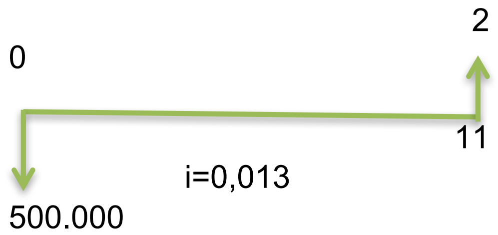
P= valor inicial o inversión n= tiempo i= tasa de interés simple.

Ejemplo:

Una persona invierte $500.000 durante 11 meses en una cuenta que paga el 1,3% simple mensual, ¿cuánto podrá retirar una vez cumplido el tiempo?

P= $500.000 n= 11 meses i= 1,3% mensual.

Véase gráficamente lo que sucede:



Aplicando la fórmula (2) se resuelve el interrogante así:

$$F = 500.000x(1 + (11x0,013)$$
$$F = 500.000x(1 + 0,143)$$
$$F = 500.000x1,143$$
$$F = 571.500$$

La persona puede retirar, al cabo de los 11 meses, \$571.500.

Cálculo del valor inicial
En ocasiones lo que se requiere es calcular el valor inicial y, para ello, se utiliza la siguiente fórmula:

$$P = \frac{F}{(1 + (ixn))} \qquad (3)$$

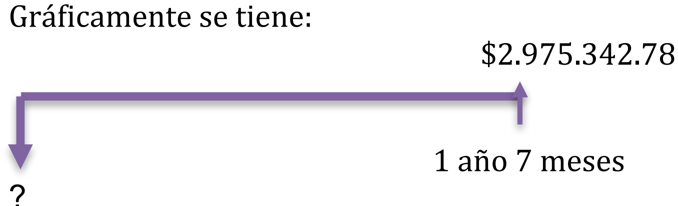
Dónde:
F= valor final o monto n= tiempo i= tasa de interés simple.

Ejemplo:

Javier debe pagar dentro de 1 año y 7 meses \$2.975.342,78 a una tasa del 0,72% simple mensual, ¿qué cantidad le prestaron?

F=\$2.975.342.78 n=1 años 7 meses i=0,70% mensual

Gráficamente se tiene:



Dado que el tiempo está en una combinación de años y meses, lo mejor es convertir el tiempo a meses así:

El tiempo es 1 año 7 meses que es equivalente a decir:
1 año= 12 meses + 7 meses = 19 meses

Aplicando la fórmula (3) se tiene:

$$P = \frac{F}{(1 + (ixn))}$$

$$P = \frac{2.975.342,78}{(1 + (19x0,007))} = \frac{2.975.342.78}{(1 + 0,133)}$$

$$P = \frac{2.975.342,78}{1,133} = 2.626.074,83$$

Tasa de interés

Cálculo de la tasa de interés

En ocasiones lo que debe hallarse es la tasa de interés simple que se cobra, bien por un préstamo o se paga por una inversión. En este caso, se debe aplicar la fórmula que aparece a continuación:

$$i = \frac{\frac{F}{P} - 1}{n} \qquad (4)$$

Dónde:

F= valor final P= valor inicial n= tiempo

Debe entenderse que el resultado dará en la unidad de tiempo que tenga "n", es decir, si el tiempo está en meses la tasa será mensual y, por consiguiente, si el tiempo está en años la tasa será anual.

Ejemplo:

¿Qué tasa de interés simple reconocieron por una inversión de $2.000.000, para que en 18 meses entregaran $2.400.000?

P=20000 F=$2.400.000 n= 18 meses

Remplazando en la fórmula (4):

$$i = \frac{\frac{2.400.000}{2.000.000} - 1}{18}$$

$$i = \frac{1.2 - 1}{18} = 0{,}0111$$

$$i = 1{,}11\%$$

La tasa de interés reconocida es del 1,11% mensual.

Tiempo

Cálculo del tiempo

Cuando el requerimiento es hallar el tiempo en el cual ha de hacerse la inversión o pagar la deuda, se hace necesario utilizar la siguiente fórmula:

$$n = \frac{\frac{F}{P} - 1}{i} \qquad (5)$$

Dónde:

F= valor final P= valor inicial i= tasa de interés

Al igual que con el cálculo de la tasa de interés que se vio anteriormente, el tiempo resultante estará en la misma unidad de medida que presente la tasa de interés, es decir, si la tasa está en meses el tiempo dará en meses, si la tasa está en años, el tiempo dará en años.

Ejemplo:

¿En qué tiempo se canceló una deuda de $ 3.000.000 por $4.982.456,67, a una tasa de 12% simple anual?

P=$3.000.000 F=$4.982.456,67 i= 12% anual

Al reemplazar los valores en la fórmula (5) se tiene:

$$n = \frac{\frac{4.982.456,67}{3.000.000} - 1}{0,12}$$

$$n = \frac{1.66081889 - 1}{0,12} = 5,5$$

$$n = 5,5$$

Es decir, que la deuda se canceló en 5,5 años. Se sabe que son años por cuanto la tasa de interés es anual.

2.3 Descuento

El descuento es una modalidad de interés simple. La diferencia radica en que el interés simple, por lo general, se paga vencido, en tanto que el descuento se produce anticipado.

En el mercado financiero operan tres tipos de descuentos: comercial, racional o simple y compuesto. En este aparte se trabajarán los dos primeros, el último se tratará con el interés compuesto.

La simbología que se utiliza es:

D = cantidad de descuesto.
V_n = Valor nominal o inicial
V_e = Valor final o a pagar
n = Tiempo
i = tasa de descuento

En el descuento, el tiempo corresponde al tiempo anticipado en el que se paga la obligación y, al igual que en el interés simple, debe estar en la misma unidad de medida que la tasa de descuento, es decir, si la tasa está en meses, el tiempo también; si por el contrario está en años, el tiempo también debe estar en años.

A continuación se verá cómo calcular cada uno de los elementos:

Cálculo de la cantidad de descuesto

Para calcular la cantidad que descontarán por pagar en forma anticipada una deuda, se utiliza la siguiente fórmula:

$$D = Vnxixn$$

Ejemplo:

Juliana tiene una deuda de $1.000.000. Si la quiere cancelar 5 meses antes, aprovechando una tasa de descuento del 8% anual, ¿qué cantidad le descontarán?

Los datos que entrega el problema son:

V_n = $1.000.000;   n = 5 meses;   i= 8% anual D= ¿?

Como el tiempo y la tasa de descuento no están en la misma unidad de medida, lo primero que debe hacerse es convertir uno de los dos. En este caso, se convertirá la tasa de descuento a meses así:

$$i_m = \frac{0{,}08}{12} = 0{,}0066667$$

Reemplazando los valores en la fórmula se tiene:

$$D = 1.000.000x0{,}0066667x5 = 33.333.33$$

Es decir, que Juliana recibirá un descuento de $33.333,33 por pagar 5 meses antes del vencimiento.

Descuento comercial

Es aquel que se calcula sobre el valor nominal de un documento y siempre se paga antes de su vencimiento.

$$V_e = V_n\left(1 - (ni)\right)$$

Ejemplo:

Pedro tiene una deuda de $800.000 y si la paga 9 meses antes del vencimiento, le concederán una tasa de descuento del 1% mensual. ¿Qué cantidad pagará realmente si acepta la oferta?

Los datos del problema son:

V_n = $800.000 i= 1% mensual n= 9 meses V_e= ¿?

Como el tiempo y la tasa de descuento están en la misma unidad, los datos se pueden reemplazar sin problema en la fórmula, dando como resultado:

$$V_e = 800.000(1-(0{,}01x9))$$
$$V_e = 800.000(1-0{,}09)$$
$$V_e = 800.000x0{,}91$$
$$V_e = 728.000$$

Si pedro paga 9 meses antes, tendrá que pagar $728.000 en vez de los $800.000.

Descuento racional

Es aquel que se calcula sobre el valor efectivo de un documento.

$$D_r = V_e xni \qquad (1)$$

Sin embargo, $V_e = V_n - D_r$

Reemplazando $V_e = V_n - V_e$xnxi

$$V_e + V_e xnxi = V_n$$
$$V_e(1+(nxi) = V_n$$
$$V_e = \frac{V_n}{[1+(ixn)]} \qquad (2)$$

Al reemplazar 2 en 1, se tiene:

$$D_r = \left[\frac{V_n}{[1+(nxi)]}\right] xnxi$$

$$D_r = \frac{V_n xixn}{[1+(ixn)]} \qquad (3)$$

Esto es lo que se llama descuento justo, interior o por dentro.

Ejemplo:

Tadeo quiere saber cuál es el descuento racional que le otorgan por un préstamo de $2.000.000, si lo cancela antes de 8 meses a una tasa de descuento del 15% anual y cuánto pagará realmente.

Primero se calcula el descuento racional a partir de la fórmula (3), pues se tienen los siguientes datos:

V_n = $2.000.000 i= 15% anual n= 8 meses i_m= 0,15/12 = 0,0125.

$$D_r = \left\{ \frac{V_n xixn}{[1+(in)]} \right\}$$

$$D_r = \frac{200.000x0{,}0125x8}{1+(8x0{,}0125)}$$

$$D_r = \frac{200.000}{1{,}10}$$

$$D_r = 181.818{,}18$$

El descuento racional que recibirá Pedro es de $181.818,18.

Para saber cuánto deberá pagar se aplica la fórmula (2), así:

$$V_e = \frac{V_n}{[1+(in)]}$$

$$V_e = \frac{2.000.000}{[1+(8x0{,}0125)]}$$

$$V_e = \frac{2.000.000}{1{,}10}$$

$$V_e = 1.818.818{,}82$$

La cantidad que Pedro pagará es $1.818.818,82.

Cálculo del tiempo

Para calcular el tiempo en el cual se realizó el pago, se utiliza la siguiente fórmula:

$$n = \frac{1-\left(\frac{V_e}{V_n}\right)}{i} \qquad (4)$$

Ejemplo:

¿En qué tiempo se canceló una deuda de $1.2000.000, para que a una tasa de descuento del 12% anual se pagara $1.000.000.?

Los datos del problema son:

V_n= $1.200.000 V_e = $1.000.000   i =0,12 anual o 1% mensual

Reemplazando los valores en la fórmula (4) se tiene:

$$n = \frac{1 - \frac{1.000.000}{2.000.000}}{0,01}$$

$$n = \frac{1 - 0,5}{0,01} = 50$$

Como la tasa se trabajó en meses, el tiempo es en meses, es decir, que el tiempo en que se canceló la deuda fue de 50 meses.

Nota: Resolver el problema con la tasa en años.

Cálculo de la tasa de descuento

Para calcular la tasa de descuento, la fórmula que se utiliza es:

$$i = \frac{1 - \frac{V_e}{V_n}}{n} x100 \qquad (5)$$

Ejemplo:

¿Qué tasa de descuento concedieron por pagar una deuda de $700.000 a los 5 meses por $538.000?

Los datos del problema son:

V_n= $700.000 V_e = $538.000   n= 5 meses.

Reemplazando los valores en la fórmula (5) se tiene:

$$i = \frac{1 - \dfrac{538.000}{700.000}}{5} x100$$

$$i = \frac{1 - 0{,}76858143}{5} = 0{,}04628571 x100$$

$$i = 4{,}63\%$$

Como el tiempo está en meses, la tasa de descuento es mensual, entonces la tasa de descuento concedida fue del 4,63% mensual.

Vencimiento

Existen dos clases de vencimientos: el medio y el común.

Vencimiento medio

Su característica fundamental radica en que el valor nominal de un documento tiene que ser igual a la suma de los valores nominales de los documentos por los cuales se desea cambiar. Esto implica que el valor del nuevo documento también tiene que ser igual a la suma de los valores actuales de los documentos que se cambian o se negocian.

Ejemplo:

Se tienen dos letras, una de $50.000 y la otra de $100.000, que vencen a los 6 y 9 meses, respectivamente, y contemplan una tasa de interés del 3% mensual.

Si se quieren cambiar estas dos letras por una sola, ¿cuál será el vencimiento de la nueva letra? Considerar la operación en forma comercial.

$V_{e1} + V_{e2} = V_e$ nueva letra

$+ V_{n2} = V_n$ nueva letra

50.000 + 100.000= 150.000

$V_e = V_n - D_c$

$V_e = V_n(1 - in)$

$V_e = 50.000[1 - (0.03)(6)] + 100.000[1 - (0.03)(9)]$

$150.000[1 - (0.03)(n)] = 50.000(0.82) + 100.000(0.73)$

$150.000 - 4.500n = 41.000 + 73.000$

$-4.500n = -36.000$

$n = 8$

En el vencimiento medio, el problema consiste en calcular el vencimiento del nuevo contrato.

Vencimiento común

Su característica principal radica en que el valor nominal del(los) nuevo(s) documento(s) es diferente de la suma de los valores nominales de los documentos por los cuales se desea cambiar.

Dado el valor nominal del nuevo documento o los nuevos documentos, hallar su vencimiento. Dado el vencimiento del nuevo o los nuevos documentos, hallar su valor nominal.

Ejemplo:

Con los datos del problema anterior y teniendo en cuenta que el valor nominal del nuevo documento será de $170.000, hallar el vencimiento en forma racional y comercial.

En forma comercial:

$V_{e1} + V_{e2} = V_e$ del nuevo documento

$V_e = V_n(1 - in)$

$50.000[1 - (0.03)(6)] + 100.000[1 - (0.03)(9)] = 170.000[1 - (0.03)(n)]$

$41.000 + 73.000 = 170.000 - 5.100n$

$-56.000n = -5.100$

$n = -10{,}98\ meses$

En forma racional:

$$V_e = \frac{V_n}{(1 + in)}$$

$$\frac{50.000}{1 + (0{,}03)(6)} + \frac{100.000}{1 + (0{,}03)(9)} = \frac{170.000}{1 + (0{,}03)(n)}$$

121.113,03(1+0,03n) = 170.000

n = 13,45 meses

Ejemplo:

El señor García debe una letra de $120.000 para cancelarla dentro de 5 años y otra de $150.000 para liquidarla dentro de 6 años. Sin embargo, quiere cancelarlas con un sólo pago dentro de 2 años. ¿Qué cantidad debe hacer efectiva en esa fecha, si la tasa de interés es de 8% anual en forma compuesta?

$$V_e =$$

$$\frac{V_n}{(1+i)^n}\frac{120.000}{(1{,}08)^5} + \frac{150.000}{(1{,}08)^6} = \frac{V_n}{(1{,}08)^2}$$

$$81.671{,}54 + 94.529{,}87 = \frac{V_n}{1{,}1664}$$

$$176.201{,}41\frac{V_n}{1{,}1664}$$

$$V_n = 205.521{,}32$$

Ejemplo:

El señor Segura tiene documentos en las siguientes condiciones: $100.000 con vencimiento en 4 meses; $250.000 con vencimiento en 10 meses; $300.000 con vencimiento en 20 meses. La tasa de interés pactada es de 3% mensual y el señor Segura desea cambiar estos tres documentos en uno solo. ¿Cuál será el plazo para dicho documento, si se considera un vencimiento medio?

$$V_x = V_{x1} + V_{x2} + V_{x3}$$

$$V_n = 100.000 + 250.000 + 300.000$$

$$V_n = 650.000$$

$$V_e = V_{e1} + V_{e2} + V_{e3}$$

$$V_e = V_x(1 - in)$$

$$V_{e1} = 100.000[1 - (0{,}03)(4)]$$

$$V_e = 88.000$$

$$V_{e2} = 250.000[1 - (0{,}03)(10)]$$

$$V_{e2} = 175.000$$

$V_{e3} = 3000.000[1 - (0,03)(20)]$

$V_{e2} = 120.000$

$V_e = 88.000 + 175.000 + 120.000$

$V_e = 383.000$

383.000 = 650.000[1 - (0,03)(n)]

n = 13,69 meses

Ejemplo:

Resolver el problema anterior considerando que el valor nominal del nuevo documento debe ser $900.000.

$V_e = V_x(1 - in)$

383.000 = 900.000[1 -(0.03)

= 900.000 - 27.000n

517.000 = 27.000n

n = 19,14 meses

Ejemplo:

Resolver el problema anterior considerando que el plazo del nuevo documento es de 15 meses.

$V_e = V_x\,(1 - in)$

383.000= $V_x = [1 - (0.03)(15)]$

383.000=0,55 V_x

$$V_x = \frac{383.000}{0,55}$$

$$V_x = 69636,36$$

Ejemplo:

El señor López tiene una letra de $200.000, la cual reconoce unos intereses del 3% mensual y vence dentro de 5 meses. El señor López ofrece la letra porque necesita dinero para atender un compromiso urgente. Quien ofrece comprársela le exige una tasa de descuento del 5% mensual, que es con la cual esa persona acostumbra trabajar. ¿Cuánto debe darle por la letra?

Primero se halla el valor futuro de la letra a la tasa que se conoce, es decir, el 3% mensual.

$$F = P\,(1 + in)$$

$$F = 200.000[1+ (0,03)(5)\,]$$

$$F = 230.000$$

Este valor futuro será el valor nominal de la letra. Luego se halla el valor efectivo que va a recibirse al 5%.

$$Ve = \frac{V_n}{(1 + in)}$$ Donde i es la tasa de descuento.

$$Ve = \frac{230.000}{1 + (0,05)(5)}$$

$$Ve = 184.000$$

Resumen

Las fórmulas utilizadas a lo largo de esta unidad fueron:

Interés simple

Cantidad de interés:

$$I = Vnxixn$$

Valor futuro:

$$F = PX\big(1 + (nxi)\big)$$

Tiempo:

$$n = \frac{\frac{F}{P} - 1}{i}$$

Tasa de interés:

$$i = \frac{\frac{F}{P} - 1}{n}$$

Valor presente:

$$P = \frac{F}{\big(1 + (nxi)\big)}$$

Descuento

Cantidad de descuento:

$$D = Vnxixn$$

Valor a pagar o descuento comercial:

$$Ve = Vn[1 - (in)]$$

Descuento racional:

$$D_r = \frac{D_c}{(1 + in)}$$

Bibliografía

- Álvarez, A. Matemáticas Financieras. Editorial Mc Graw Hill, Tercera edición.
- Aliaga, C. Matemáticas Financieras, un enfoque práctico. Editorial PRENTICE.
- Díaz, A, y Aguilera V. Matemáticas financieras. Editorial Mc Graw Hill, Tercera edición.
- García, J. Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita. Editorial Pearson.
- Gómez, A. Matemáticas Financieras. Editorial Universidad del Quindío.
- Portus, L. (2003). Matemáticas financieras, Editorial Mac Graw Hill.