UNIDAD 1. INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Introducción a las matemáticas financieras

Tabla de contenido

Introducción

Esta unidad introducirá al estudiante de Administración de Empresas en la definición e importancia de las matemáticas financieras y le ayudará a recordar la utilización de los logaritmos, las progresiones, las potencias y los radicales, todos elementos fundamentales que utilizará con frecuencia en el desarrollo de la asignatura y en su vida profesional.

Objetivos

Objetivo general:

Comprender qué es la matemática financiera, manejar su lenguaje, reconocer su importancia y utilizar sus herramientas más útiles.

Objetivos específicos:

- Definir qué es la matemática financiera.
- Trabajar con logaritmos, progresiones aritméticas y geométricas, y exponentes.
- Comprender el principio de equivalencia.
- Entender lo que significa el valor del dinero en el tiempo.
- Reconocer lo que significan las expresiones: interés, capital, tiempo, tasa de interés y tasa de retorno.
- Diferenciar lo que significan el valor presente neto y el valor presente.
- Construir líneas de tiempo.

1.1 ¿Qué son las matemáticas financieras?

Las matemáticas financieras son el conjunto de principios, conceptos y técnicas cuantitativas de análisis, útiles para la evaluación, comparación económica y selección de alternativas de inversión, con relación a fuentes, instrumentos, mecanismos, criterios y condiciones para el otorgamiento y disposición de recursos económicos que financien los proyectos, tanto de inversión como de desarrollo. Es por esta razón que se habla del "valor del dinero en el tiempo", como el concepto más importante de la matemática financiera. Tarquin y Leland, señalan: "Esta afirmación es en efecto cierta, ya que si una persona decide invertir su dinero hoy (por ejemplo, en un banco, en una corporación de ahorros y préstamos), en el mañana tendrá más dinero acumulado que el que invirtió inicialmente".

Como resultado principal de esta variación, se introduce el concepto de interés para que el dinero invertido o prestado por un periodo de tiempo, obtenga la rentabilidad por no utilizarlo hoy, sino aplazar su consumo para un periodo conocido de tiempo. Cuando se invierte o se presta un dinero y se deja pasar el tiempo para recuperar la inversión o el préstamo, se está sacrificando la oportunidad de invertirlo en otro proyecto y, al mismo tiempo, sacrificando la rentabilidad que le hubiera generado una inversión alternativa, lo cual se podría considerar como un equivalente de lo que el dinero le habría producido en otras alternativas. Así, puede parecer indiferente recibir una determinada suma en la actualidad, o su equivalente en cualquier momento futuro.

En la evaluación de un proyecto, la inversión se considera como un consumo mínimo en el presente y el valor de los flujos de caja en el tiempo como la recuperación de la inversión. Esto hace necesario que se determine una tasa de interés que, además de representar dos sumas de dinero en periodos diferentes, tenga en cuenta el rendimiento que va a generar el proyecto, para recuperar la inversión y, al mismo tiempo, para equilibrar el hecho de haber sacrificado los rendimientos de inversiones alternativas.

1.2 Importancia de las matemáticas financieras

Tanto los individuos como las empresas luchan por sus objetivos, haciendo frente a recursos limitados. Esto hace deseable obtener la mayor cantidad de producto con un insumo dado, lo cual resulta en operar con alta eficiencia. No debe buscarse una razonable o buena oportunidad para el uso de los recursos limitados sino la mejor oportunidad. Uno de esos recursos es el dinero. Al ser la matemática financiera la herramienta más adecuada para encontrar los efectos de la tasa de interés y/o el tiempo sobre el valor del dinero, se convierte en un elemento de capital importancia para que la toma de decisiones respecto del uso de este recurso sea el más adecuado, tanto en situaciones empresariales como personales.

A modo de ejemplo se presenta esta situación. Una persona quiere comprar una propiedad y recibe dos propuestas: La primera proviene de un familiar quien ofrece prestarle la cantidad que requiere, es decir, $80.000.000 para adquirir la vivienda, esperando que se los devuelva a los 2 años por $100.000.000 de pesos. La otra propuesta es de una entidad financiera quien ofrece prestarle la misma cantidad de dinero a 15 años, con cuotas mensuales de $960.134 pesos. El comprador acepta la oferta de su familiar. Pasados los dos años se ve ante la imposibilidad de pagar la deuda y por este motivo le quitan la propiedad. Si el comprador hubiera sabido cómo calcular el valor del dinero, tanto a los dos como a los 15 años, utilizando la matemática financiera, hubiera podido tomar una decisión diferente y no habría perdido su vivienda y la plata que pagó por ella.

La matemática financiera es la única herramienta que permite analizar la viabilidad económica de una inversión, sea esta en dinero o en la adquisición de un bien o servicio.

1.3 Repaso de logaritmos, exponentes y progresiones

Dentro de los conceptos básicos a repasar, se hace necesario recordar toda la teoría sobre logaritmos, ya que en las matemáticas financieras se utilizan fórmulas que poseen variables, como por ejemplo, exponentes y éstas requieren ser despejadas mediante la aplicación de logaritmos.

Logaritmos: Sea (y) un exponente y (a) una base, se puede decir que:

$$y = \log_a x \quad x > 0 \quad \mathrm{a} \# 1, \; \mathrm{a} > 0$$

Las dos expresiones $y = \log_a x$ y $x = a^y$ son equivalentes.

1.3.1 Propiedades generales de los logaritmos

1. El logaritmo en cualquier base de 1 es cero:

$$\log_a = 0$$

2. El logaritmo en base a de a es igual a 1:

$$\log_a a = 1$$

3. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

4. El logaritmo del cociente de dos cantidades es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

5. El logaritmo de la potencia de una cantidad, es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

6. El logaritmo de una potencia cuya base es igual a la base del logaritmo es igual al exponente:

$$\log_a a^n = n \log_a a = n$$

7. El logaritmo de un radical es igual al cociente entre el índice y el logaritmo de la cantidad subradical:

$$\log_a \sqrt[p]{x} = \frac{1}{p} \log_a x$$

Es necesario recordar:

- Los números negativos no tienen logaritmo.
- La base de un logaritmo no puede ser negativa.
- El logaritmo en cualquier base de uno es cero.
- Todo número mayor que uno tiene logaritmo positivo.
- Todo número menor que uno, pero mayor que cero tiene logaritmo negativo.

1. $Log10 = 1$

2. $Log100 = 2$

3. $Log1000 = 3$

4. $Log\frac{2}{3} = \log 2 - Log3$

5. $Log2x3 = Log2 + Log3$

6. $Log_2 8 = 3 \quad por\ que\ \ 2^3 = 8$

7. $Log0.01 = -2$

8. $Log_2 7 = \frac{Log7}{Log2}$

9. $Log_3(x+2) = 5$

$$3^5 = x + 2$$
$$x = 241$$

10. $Logx = 4$

$$10^4 = x$$
$$x = 10.000$$

Potenciación

La potenciación es una multiplicación de varios factores iguales. Al igual que la multiplicación es una suma de varios sumandos iguales (la potenciación se considera una multiplicación abreviada).

En la nomenclatura de la potenciación se diferencian dos partes: la base y el exponente, este último que se escribe en forma de superíndice. El exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma. Por ejemplo:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

En general:

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n},$$

Propiedades de la potenciación

Las propiedades de la potenciación son las que permiten resolver por diferentes métodos una potencia. Estas son:

Potencias de exponente 0
Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1.

$a^0 = 1$ si se cumple que $a \neq 0$

0^0 es la indeterminación, dado que:

$$a^0 = a^{-1} \times a^1 = \frac{a}{a}$$

Potencia de exponente 1
Toda potencia de exponente 1 es igual a la base

$a^1 = a$

Producto de potencias de base igual
El producto de dos o más potencias de igual base **a** es igual a la potencia de base **a** y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes. Se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

División de potencias de base igual
La división de dos potencias de igual base **a** es igual a la potencia de base **a** y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos. Se coloca la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potencias de una división
La potencia de una división es igual a la división de la potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Potencia de una potencia

La potencia de una potencia de base **a** es igual a la potencia de base **a** elevada a la multiplicación de ambos exponentes. Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

Propiedad distributiva

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división, pero no lo es con respecto a la suma ni a la resta.

Es distributiva con respecto a la multiplicación y división:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

No es distributiva con respecto a la adición y sustracción:

$$(a + b)^m \neq a^m + b^m$$
$$(a - b)^m \neq a^m - b^m$$

Propiedad conmutativa

La propiedad conmutativa no se cumple para la potenciación, exceptuando aquellos casos en que base y exponente son el mismo número / la misma cifra o equivalentes.
En general:

$$a^b \neq b^a$$

En particular:

$a^b = b^a$
Si y sólo si $a=b$.

Propiedad asociativa

La propiedad asociativa no se cumple para la potenciación.

$$(a^m)^n \neq (a)^{(m^n)}$$

Potencia de base 10
Toda potencia de exponente 1 es igual a la unidad de la base.

$10^1 = 10$

Las potencias son un conjunto de números potenciados o elevados a un exponente.

$10^6 = 1000000$
$10^4 = 10000$
$842000 = 8.42x10^5$

Potencias de exponentes fraccionarios
Es una potencia que tiene su exponente en forma de fracción y en la que se cumple que:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Radicación

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Suponga que dan un número **x** y piden calcular otro, tal que, multiplicado por sí mismo un número **y** de veces del número **x.**

Por ejemplo: Calcular qué número multiplicado por sí mismo 2 veces da 144. Ese número es 12.

El número que está dentro de la raíz se llama **radicando,** el grado de la raíz se llama **índice del radical** y el resultado se llama **raíz.**

Se puede considerar la radicación como un caso particular de la potenciación. En efecto, la raíz cuadrada de un número (por ejemplo a) es igual que $a^{1/2}$, del mismo modo la raíz cúbica de a es $a^{1/3}$ y, en general, la raíz enésima de un número a es $a^{1/n}$.

La mejor forma de resolver los ejercicios de operaciones con raíces es convertir las raíces a potencias y operar teniendo en cuenta las propiedades dadas para la operación de potenciación.

Progresiones

Progresiones aritméticas

Una sucesión de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,…, a_n,… Cada uno de los números reales se llama término de la sucesión.

El conjunto ordenado de números impares 3, 5, 7, 9, 11, 13,... es una sucesión de números reales.

Al término: $a_n = 3 + 2(n-1)$ se le llama término general.

Sin embargo, no todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, en la importante sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,... no hay ninguna fórmula que exprese el término general.

Al considerar la sucesión de término general $a_n = 3n + 2$

5, 8, 11, 14, 17, 20,...

Se observa que cada término de la sucesión es igual que el anterior más 3. Se dice que la sucesión a_n es una progresión aritmética y que G = 3 es la diferencia de la progresión.

Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero), es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por G.

En la progresión anterior $a_1 = 5$, $a_2 = 8$ y $G = 8 - 5 = 3$.

En ocasiones hay que referirse a la progresión formada por los *n* primeros términos de la progresión; en este caso se trata de una progresión aritmética limitada.

Término general

Hay que fijarse en la progresión aritmética ilimitada a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,…, a_n,… Según la definición, cada término es igual al anterior más la diferencia.

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

Generalizando este proceso, se obtiene el término general:

$$a_n = a_1 + (n-1) \text{ x} G$$

Ejemplos:

- El término general de la progresión aritmética 5, 8, 11, 14... es:
  $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$
- El término general de una progresión aritmética en la que $a_1 = 13$ y $d = 2$ es:
  $a_n = 13 + (n - 1) \cdot 2 = 13 + 2n - 2 = 2n + 11$
- Hay que hallar el primer término de una progresión aritmética sabiendo que $a_{11} = 35$ y $d = 4$. Para ello, se escribe $a_{11} = a_1 + (11 - 1) \cdot 4$, es decir, $35 = a_1 + 40$, de donde $a_1 = 35 - 40 = -5$

Se puede conseguir otra expresión para el término general en función de otro término cualquiera, en lugar del primer término. Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ y $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$, despejando a_1 en ambas expresiones e igualando resulta:

$$a_n = a_k + (n - k) \times G$$

Progresiones geométricas

Observe las potencias de 10 que resultan de la sucesión $a_n = 10^{n-1}$.

$1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots$

Cada término de esta sucesión es igual al anterior multiplicado por 10. Esta sucesión es una **progresión geométrica**.

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero), es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado **razón**, que se representa por ***r***.

Término general

Según la definición anterior, en la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$, se verifica:

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

Generalizando este proceso se obtiene el término general.

Ejemplos:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

¿Cuál es la razón de la progresión geométrica 3, 6, 12,...? La razón se obtiene dividiendo un término por el anterior: r = 6: 3 = 2.

¿Cuál es el quinto término de una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 3$? Se puede hallar cada uno de los términos (2, 6, 18, 54, 162,...) multiplicando cada término por 3. También se puede obtener directamente: $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = a_1 \cdot r^4$; $a_5 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

1.4 El valor del dinero en el tiempo

A menudo se dice que el dinero produce dinero. Esta aseveración es realmente verdadera. Si una persona elige invertir dinero hoy en un banco, un fondo de inversión u otra forma de acumular dinero, mañana tendrá más dinero que el que invirtió originalmente. También debe notarse que si una persona o empresa encuentra necesario pedir prestado dinero hoy, mañana la deuda será mayor que la originalmente prestada. En uno u otro caso lo que se produce es un cambio en el valor del dinero en el tiempo. A la evidencia del valor del dinero en el tiempo se le denomina interés. Así, si invierte dinero, el interés será:

Interés= cantidad acumulada – cantidad inicial.

Si por el contrario, pide dinero prestado el interés será:
Interés = cantidad a pagar – cantidad recibida en préstamo.

Ejemplo 1:

Fabián abre una cuenta de ahorros en el Banco El Porvenir con $500.000 y a los 12 meses tiene acumulado $589.910. Para saber qué interés obtuvo sobre la inversión, realiza la siguiente operación:

Interés= $589.910 -$500.000= $89.910.

Ejemplo 2:

Santiago le pide prestado al Banco Sermag $500.000 y a los 15 meses paga $589.910. Para saber qué intereses pagó, realiza la siguiente operación:

Intereses= 589.919 – 500.000 = $89.910.

También puede señalarse que el dinero tiene valor en el tiempo debido a que su poder adquisitivo cambia con el tiempo. Sin embargo, aunque este cambio es importante, el concepto de valor de dinero en el tiempo dentro de este curso se limitará al hecho de que el dinero tiene un potencial de ganancias.

1.5 Principio de equivalencia

Se dice que dos cantidades ubicadas en diferentes periodos de tiempo son equivalentes aunque no iguales, si producen el mismo resultado económico. Así, $1 de hoy es equivalente a $1,30 dentro de un año, si la tasa de interés es del 30% anual.

Todas las personas y organizaciones cuando realizan una inversión o un préstamo, utilizan el criterio de equivalencia, pues están dispuestos a entregar (invertir) o recibir (préstamo) hoy, una suma de dinero X a cambio de recibir o pagar en el futuro una cantidad que equivale al valor inicial más los intereses ocasionados por la operación financiera realizada.

El concepto de equivalencia es relativo dado que las expectativas de cada persona respecto a los rendimientos que esperan son diferentes.

En términos generales, se dice que un valor presente es equivalente a un valor futuro, si este último cubre el valor del primero más los intereses exigidos por el propietario del dinero.

1.6 Conceptos básicos

Interés: Ganancia que se obtiene de una inversión.

Capital: Para las matemáticas financieras, el capital está representado por la inversión inicial que se hace con el objetivo de obtener una ganancia.

Tiempo: Distancia que hay entre el momento en que se realiza la inversión o el crédito y el momento en que se retira o se paga. Puede estar medido en meses, bimestres, trimestres, cuatrimestres, semestres o años.

Tasa de interés: Costo o rendimiento del capital expresado en términos porcentuales.

Tasa de retorno: Toda inversión que se hace produce un rendimiento propio. A éste, convertido en forma porcentual, se denomina tasa de retorno.

Construcción de líneas de tiempo: Representación gráfica de los ingresos y egresos de una alternativa en un segmento de recta que tiene la longitud del tiempo que dura la operación medida en periodos.

Resumen

La matemática financiera es importante para cualquier persona y, en especial, para un administrador de empresas, dado que le suministra herramientas que le permite tomar decisiones acertadas respecto a inversiones o endeudamientos.

Los tres operadores más utilizados en la solución de problemas financieros son: los logaritmos, los exponentes y las progresiones.

El concepto más importante al interior de las matemáticas financieras es el valor del dinero en el tiempo, ya que el dinero sufre aumentos o disminuciones en el tiempo debido a dos elementos importantes: la tasa de interés o a la pérdida de poder adquisitivo.

El principio de equivalencia demuestra que una cantidad de dinero hoy es igual a una cantidad de dinero en el futuro, gracias al efecto del tiempo y la tasa de interés que la afecte.

Bibliografía

- Álvarez, A. Matemáticas Financieras. Editorial Mc Graw Hill, Tercera edición.
- Aliaga, C. Matemáticas Financieras, un enfoque práctico. Editorial PRENTICE.
- Díaz, A. Aguilera. Matemáticas financieras. Editorial Mc Graw Hill, Tercera edición.
- García, J. Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita. Editorial Pearson.
- Gómez, A. Matemáticas Financieras. Editorial Universidad del Quindío.
- Portus, L. (2003). Matemáticas financieras .Editorial Mac Graw Hill.
- Tarquin, A. y Leland, B. (1991). Ingeniería económica. Editorial Mcgraw-Hill, tercera edición.

Referencias electrónicas

- www.matematicas-financieras.com
- www.aulafacil.com/CursoMatematicasFinancieras
- www.casua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/98/.../mate_fin.pdf